Oraux. Série n°29. Systèmes différentiels et équations différentielles

Systèmes différentiels

1) ($\clubsuit$) (*écrit Centrale*) Résoudre $X''(t) = -SX(t)$, où $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\omega_j^2 > 0$.

2) ($\clubsuit$) (*Mines*) Résoudre le système (E) : $\begin{cases} x' = -x + 3y + te^{-t} \\ y' = 3x + 2y + e^t \end{cases}$

3) ($\clubsuit$) *Systèmes différentiels à coefficients constants* : $(S) : X'(t) = AX(t)$, avec $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Que dire de la forme des solutions si $\chi_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$? Même question si $\chi_A(x) = (x-2)^3$.

Equations différentielles d'ordre 1

4) a) ($\clubsuit$) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer que si $\lim_{t\to+\infty}(f'(t) + f(t)) = 0$, alors $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

b) (X) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to+\infty} f'(t) + f(t) = 1$. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} f'(t) = 0$.

5) ($\clubsuit$) (*Mines, Centrale, X*) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

On considère l'équation différentielle $(E) : y'(x) + ay(x) = f(x)$, où $a \in \mathbb{R}$ est un réel fixé.

a) On suppose $a > 0$. Montrer que toute solution de (E) converge vers L/a en $+\infty$.

b) On suppose $a < 0$. Montrer que (E) admet une unique solution bornée (E), et qu'elle converge vers L/a.

Equations différentielles à coefficients constants

6) ($\clubsuit$) (*Centrale*) a) Soit E un $\mathbb{C}$-ev, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ distincts tels que $(f - \alpha\,\mathrm{Id}) \circ (f - \beta\,\mathrm{Id}) = 0$.

Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - \beta\,\mathrm{Id}) = E$.

b) Retrouver le résultat du cours concernant les solutions d'une équa diff d'ordre 2 à coefficients constants.

c) Retrouver le résultat du cours concernant les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

7) ($\clubsuit$) ($\bigstar$) (*X-ESPCI*) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et non constante.

Montrer que $(E) : y'' + 2y' + 2y = f(x)$ n'admet pas deux solutions périodiques indépendantes.

Equations différentielles d'ordre 2

8) ($\clubsuit$) (*extrait Mines écrit*)

Résoudre $x^2y''(x) + xy'(x) - n^2y(x) = 0$ en utilisant le changement de variable $x = e^t$.

9) ($\clubsuit$) (*Mines*) On considère $(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.

Montrer que (E) admet un système fondamental (y_1, y_2), avec y_1 paire et y_2 impaire, ssi a est impaire et b paire.

Utilisations des séries entières

10) ($\clubsuit$) (*Centrale*) Soit $\lambda > 0$. Montrer que les solutions de $(E) : y'' - (x^2 + \lambda^2)y = 0$ sont DSE sur $\mathbb{R}$.

11) ($\clubsuit$) a) Déterminer l'unique solution de $(E) : xy'' + y' + y = 0$ qui est DSE en 0 et vérifie $y(0) = 1$.

b) Résoudre $(E) : y'' - xy' + y = 1$ en cherchant d'abord une solution particulière non nulle de (H).

12) ($\clubsuit$) (*Mines*) On considère $(E) : 2xy'' + y' - y = 0$.

a) Montrer que (E) admet une solution f qui est DSE au voisinage de 0 et telle que $f(0) = 1$.

Préciser son rayon de convergence. Exprimer $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

b) Résoudre (E).

Etude qualitative

13) ($\clubsuit$) (X) On considère $(E) : y'' + qy = 0$, avec q continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

a) Soit (y_1, y_2) une base des solutions. Montrer que $y_1 y_2' - y_1' y_2$ une fonction constante non nulle.

b) Montrer que (E) admet des solutions non bornées.

14) ($\clubsuit$) (*Centrale*) Soit $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ strictement croissante, avec $\varphi(0) > 0$.

Montrer que toute solution de $(E) : y'' + \varphi(x)y = 0$ est bornée.

15) ($\clubsuit$) (*Centrale*) Soit $q : I \to \mathbb{R}$ continue strictement positive, et y solution de $(H) : y'' - q(x)y = 0$ sur I.

Soient $a < b$ deux zéros de y. Calculer $\int_a^b y(x)^2 \, q(x) \, dx$. Qu'en déduire des solutions non nulles de (H) ?

b) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Soient $a < b$ deux réels appartenant à I.

Montrer qu'il existe une unique fonction z vérifiant $(E) : z'' - q(x)z = f(x)$ et $z(a) = z(b) = 0$.

16) ($\clubsuit$) (*inspiré ENS*) Soit $u : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ne s'annulant pas et telle que $\lim_{x \to +\infty} u(x) = L \neq 0$.

a) Déterminer la dimension de l'espace des solutions de $(E) : uy'' = u''y$.

b) Donner une solution φ de (E) non nulle et bornée en $+\infty$.

c) Soit ψ une solution indépendante de φ. Montrer que ψ n'est pas bornée.

Equations se ramenant à des équations différentielles

17) ($\clubsuit$) On considère $E = C^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$ et pour $f \in E$, on pose $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt$ si $x \neq 0$ et $g(0) = f(0)$.

a) Trouver les valeurs propres de $\phi : f \longmapsto g$.

b) On note E_0 le sev des fonctions $f \in E$ qui s'écrivent comme somme d'une série entière.

Montrer que E_0 est stable par ϕ, et déterminer les valeurs propres de $\phi_{|E_0}$.

18) ($\clubsuit$) (X) Trouver les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $(E) : f(x) = x + \int_0^x (x - t) f(t) \, dt$.

19) a) ($\clubsuit$) Résoudre l'équation différentielle $y'(x) = y(-x)$.

b) ($\clubsuit$) (*Centrale, X*) Résoudre $(E) : y'(x) + y(-x) = e^x$.

c) ($\bigstar$) (*Mines*) Résoudre l'équation différentielle $y'(x) = xy(-x)$.

Lemme de Gronwall

20) ($\clubsuit$) On suppose $y' + a(x)y \leq b(x)$.

Montrer que $y(x) \leq z(x)$ où z correspond au cas d'égalité : $z(0) = y(0)$ et $z' = a(x)z + b(x)$.