Oraux. Série n°29. Equations différentielles. Indications

Systèmes différentiels

1) On considère $(Z_1, ..., Z_n)$ une base (orthonormée) de vecteurs propres.

En écrivant $X(t) = \sum_{j=1}^{n} y_j(t) Z_j$, l'équation s'écrit : $\forall j,\ y_j''(t) = \omega_j^2 y_j(t)$.

Donc on obtient comme solutions : $X(t) = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j \cos \omega_j t + \beta_j \sin \omega_j t) Z_j$, avec $(\alpha_j, \beta_j)_{1 \le j \le n} \in \mathbb{R}^{2n}$.

2) La matrice symétrique $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable de valeur propres λ et μ.

L'équation caractéristique est $z^2 + z - 11 = 0$, donc $\lambda = \frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{5})$ et $\mu = \frac{1}{2}(1 - 3\sqrt{5})$.

Les solutions de (H) sont les $\alpha Z_1 e^{\lambda t} + \beta Z_2 e^{\mu t}$, où Z_1 et Z_2 vecteurs propres associées à λ et μ.

On cherche ensuite (par superposition) une solution particulière sous la forme $(aX + btY)e^{-t} + cZe^t$.

2) bis) Chercher une solution particulière sous la forme $x(t)$ et $y(t)$ polynômes de degré 1.

On a $A(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} = \dfrac{t}{1+t^2} I_2 + \dfrac{1}{1+t^2} J$, où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

On se place dans une base de diagonalisation de J, ce qui conduit au changement de variable $z(t) = x(t) + iy(t)$.

On obtient $(H) : (1 + t^2) z' = (t - i) z$, c'est-à-dire $(t + i) z'(t) = z(t)$, donc $z(t) = K(t + i)$ sont les solutions.

3) Si $\chi_A(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$, alors A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2, 3\}$.

Donc les solutions sont de la forme $X(t) = \alpha Z_1 e^t + \beta Z_2 e^{2t} + \gamma Z_3 e^{3t}$, où Z_i vecteur propre de A.

Si $\chi_A(x) = (x - 2)^3$, les solutions sont de la forme $X(t) = \left(\alpha Z_1 + \beta t Z_2 e^{2t} + \gamma t^2 Z_3\right) e^{2t}$.

On le prouve en trigonalisant A : on se ramène à un système différentiel triangulaire supérieure et les équations sont de la forme $y' = 2y + \varphi(t)$, où $\varphi(t)$ est (par récurrence forte descendante) de la forme $P(t)e^{2t}$.

Equations différentielles d'ordre 1

4) a) On pose $g(t) = f'(t) + f(t)$. On a donc $f(t) = ke^{-t} + e^{-t} \int_0^t g(t) e^t \, dt$.

Sachant que $\lim_{t \to +\infty} g(t) = 0$, on prouve (par une preuve de type Cesaro) que $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

b) Appliquer a) à la fonction $g(t) = f(t) - 1$, et noter $g + g' \to 0$.

5) *Remarque* : Si f est cste, $y(x) = L/a$ est solution. Par linéarité, on peut se ramener au cas $L = 0$.

a) La forme générale des solutions est $y(x) = Ke^{-ax} + e^{-ax} \int_0^x f(t) e^{at} \, dt$.

L'exercice consiste donc à prouver que $\lim_{x \to +\infty} e^{-ax} \int_0^x e^{at} f(t) \, dt = L$

Utiliser une preuve de type Cesàro

(il est conseillé de se ramener au cas $L = 0$ en considérant $f(x) = g(x) + L$, avec $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$).

b) La forme générale des solutions est $y(x) = ke^{-ax} + e^{-ax} \int_{+\infty}^x f(t) e^{at} \, dt$ (l'intégrale converge)

Montrer que $\varphi(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-ax} f(t) \, dt$ est une solution de (E) bornée.

En déduire que les autres solutions ne le sont pas.

Equations différentielles à coefficients constants

6) a) Les sev propres sont en somme directe, donc $\mathrm{Ker}(f-\alpha\,\mathrm{Id})\oplus\mathrm{Ker}(f-\beta\,\mathrm{Id})$.

On note que $\mathrm{Im}(f-\beta\,\mathrm{Id})\subset\mathrm{Ker}(f-\alpha\,\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(f-\alpha\,\mathrm{Id})\subset\mathrm{Ker}(f-\beta\,\mathrm{Id})$.

Or, pour tout $x\in F$, $x\in\mathrm{Vect}(f(x)-\beta x, f(x)-\alpha x)$, car $x=\frac{1}{\beta-\alpha}(\beta x-f(x)+f(x)-\alpha x)$.

b) On considère $E=\{y\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})\mid y''+ay'+by=0\}$.

On suppose que l'équation $\lambda^2+a\lambda+b=0$ admet deux racines distinctes α et β.

Et on considère $f: y\longmapsto y'$. Alors sur E, $(f-\alpha\,\mathrm{Id})\circ(f-\beta\,\mathrm{Id})=0$.

Donc $\mathrm{Ker}(f-\alpha\,\mathrm{Id})\oplus\mathrm{Ker}(f-\beta\,\mathrm{Id})=E$, c'est-à-dire $E=\mathrm{Vect}(e^{\alpha x},e^{\beta x})$.

c) On considère $E=\{u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^\mathbb{N}\mid u_{n+2}+au_{n+1}+bu_n=0\}$.

On suppose que l'équation $\lambda^2+a\lambda+b=0$ admet deux racines distinctes α et β.

Et on considère $f:(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\longmapsto(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Alors sur E, $(f-\alpha\,\mathrm{Id})\circ(f-\beta\,\mathrm{Id})=0$.

Donc $\mathrm{Ker}(f-\alpha\,\mathrm{Id})\oplus\mathrm{Ker}(f-\beta\,\mathrm{Id})=E$, c'est-à-dire $E=\mathrm{Vect}((\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}},(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}})$.

7) Supposons y_1 et y_2 solutions périodiques indépendantes, de périodes T_1 et T_2.

Alors f admet est périodique, et T_1 et T_2 sont des périodes.

Comme f n'est pas constante, on peut en déduire (admettre ici ?) que T_1/T_2 est un nombre rationnel.

Donc il existe T à la fois période de y_1 et y_2. Donc y_2-y_1 est aussi périodique.

Résoudre (H) pour obtenir une contradiction.

Equations différentielles d'ordre 2

8) On pose $y(x)=z(t)$, c'est-à-dire $y(x)=z(\ln x)$.

On a $y'(x)=\frac{1}{x}z'(t)$ et $y''(x)=\frac{1}{x^2}z''(t)-\frac{1}{x^2}z'(t)$. Donc (E) s'écrit $z''(t)-n^2z(t)=0$.

En déduire $y(x)=A\cos nx+B\sin nx=\alpha e^{inx}+\beta e^{-inx}$.

9) $z_1(t)=y_1(-t)$ et $z_2(t)=-y_2(-t)$ vérifient $z_1''-a(-t)z_1'+b(-t)z_1=0$ et $z_2''-a(-t)z_2'+b(-t)z_2=0$.

Si a est impaire et b paire, alors $z_1=y_1$ et $z_2=y_2$ (par Cauchy-Lipschitz).

Réciproquement, le wronskien $y_1y_2'-y_1'y_2$ ne s'annulant pas, a et b s'expriment en fonction de (y_1,y_2).

De ce fait, si $(z_1,z_2)=(y_1,y_2)$, alors $-a(-t)=a(t)$ et $b(-t)=b(t)$, c'est-à-dire a impaire et b paire.

Remarque : Une variante consiste à résoudre le système $y_i''+a(t)y_i'+b(t)y_i=0$ d'inconnues a et b.

Utilisations des séries entières

10) $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ vérifie (E) ssi $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+2}=\frac{\lambda^2}{(n+1)(n+2)}a_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)}a_{n-2}$, avec $a_{-1}=a_{-2}=0$.

Ainsi, y est déterminée par (a_0,a_1). Par dimension, il suffit donc de prouver que le rayon est $R=+\infty$.

Or $\forall\varepsilon>0$, $|a_{n+2}|\le\frac{1}{2}\varepsilon^2|a_n|+\frac{1}{2}\varepsilon^4|a_{n-2}|$ pour $n\ge p$ assez grand, donc $a_n\le K\varepsilon^n$ pour K bien choisi.

Donc les séries entières sont de rayon de convergence $R=+\infty$. Et par dimension, ce sont LES solutions de (E).

11) a) Soit $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ de rayon de convergence $R>0$.

y vérifie (E) ssi $a_0=1$, et $\forall n\in\mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1}=-(n+1)a_n$.

On obtient $R=1$ et $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

b) $y=1$ est solution particulière de (E). On considère $(H): y''-xy'+y=0$.

$y=x$ est solution particulière de (H). On utilise la méthode de l'abaissement du degré.

Avec $y=xz$ (valable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$), y vérifie (E) ssi $xz''+2z'-x^2z'=0$, c'est-à-dire $(z')'=\left(x-\frac{2}{x}\right)(z')$.

Donc $z'=\mu e^{x^2/2}e^{-2\ln|x|}=\mu e^{x^2/2}x^{-2}$, d'où $z(x)=\lambda+\mu\int_{x_0}^x e^{t^2/2}t^{-2}\,dt$, mais on ne peut calculer cette intégrale.

En revanche, en intégrant par parties, on a $\int e^{x^2/2}x^{-2}\,dx = e^{x^2/2}x^{-1}+2\int e^{x^2/2}\,dx$.

On en conclut que les solutions de (E) sont les $y(x)=1+\lambda x+\mu(e^{x^2/2}+2\int_0^x e^{t^2/2}\,dt)$.

12) (analyse) $\sum a_n x^n$ vérifie (E) ssi $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(2n+1)}a_n=\frac{2}{(2n+2)(2n+1)}a_n$.

(synthèse) En déduire $f(x)=\cosh(\sqrt{|2x|})$ si $x\geq 0$ et $f(x)=\cos(\sqrt{|2x|})$ si $x\leq 0$.

b) Le principe général consisterait à utiliser la méthode d'abaissement du degré.

Mais la solution obtenue au a) incite à effectuer sur $\mathbb{R}^*$ le changement de variable $y(x)=z(t)$, où $t=t(x)=\sqrt{|2x|}$.

La dérivée de $x\longmapsto |2x|$ sur $\mathbb{R}^*$ est la fonction $2\operatorname{sgn}(x)$. On a $t'(x)=\frac{\operatorname{sgn}(x)}{t}$ et $t''(x)=\frac{\operatorname{sgn}(x)t'(x)}{t^2}=-\frac{1}{t^2}$,

Après calculs, on obtient : $y(x)$ vérifie (E) ssi $\operatorname{sgn}(x)\ z''(t)+z(t)=0$. Les solutions sur $]0,+\infty[$ sont $y(x)=z(t)=A\cosh(t)+B\sinh(t)$, et les solutions sur $]-\infty,0[$sont $y(x)=z(t)=A\cos(t)+B\sin(t)$.

Les seuls raccordements dérivables en 0 sont les $y(x)=AF(x)$, où $F(x)=\cosh(t)$ si $x\geq 0$ et $\cos(t)$ si $x\leq 0$.

Etude qualitative

13) b) Si y bornée vérifie (E), alors y'' est intégrable, donc y' converge, et la limite est nulle.

Supposons par l'absurde y_1 et y_2 bornées. Alors $y_1y_2'-y_1'y_2$ tend vers 0 en $+\infty$, ce qui contredit a).

14) Considérer $A(x)=y(x)^2+y'(x)^2/\varphi(x)$.

15) a) $\int_a^b y(x)^2q(x)\,dx=\int_a^b y(x)y''(x)\,dx=-\int_a^b y'(x)^2\,dx\leq 0$. Donc y^2 est nulle.

On en déduit que toute solution non nulle de (H) admet au plus un zéro sur I.

b) Par a), l'application $\varphi: S_H\to\mathbb{R}^2\quad y\longmapsto (y(a),y(b))$ est injective, et par dimension bijective.

Les solutions z de (E) s'écrivent donc sous la forme $z=z_0+\lambda y_0+\mu y_1$.

On résout alors le système inversible $z(a)=z(b)=0$ de deux équations en les deux inconnues λ et μ.

Remarque : La propriété est fausse dans le cas général (par exemple si $q\leq 0$). Par exemple, il existe une infinité de solutions vérifiant $z''+z=0$ et $z(0)=z(\pi)=0$ qui sont les fonctions $z(x)=A\sin(x)$.

16) a) Equation résulue donc dimension 2. b) On peut considérer $\varphi(u)=u$.

c) On utilise la méthode d'abaissement du degré. Avec $y=uz$, on obtient $(E): uz''+2u'z'=0$.

Donc $z'=Au^{-2}$. Pour A non nul, z' converge vers $AL^{-2}\neq 0$, donc z tend vers $\pm\infty$, et ψ aussi.

Equations se ramenant à des équations différentielles

17) a) Supposons $\phi(f)=\lambda f$, avec f non identiquement nulle. Posons $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

On a donc $F(x)=x\lambda f(x)$. On ne peut avoir $\lambda=0$, car F nulle implique $f=F'$ nulle.

Supposons λ non nul. On a $\forall x > 0$, $F'(x) = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{x}F(x)$, donc $F(x) = Ax^{1/\lambda}$. Donc $f(x) = Bx^{1/\lambda - 1}$.

Comme f continue, alors $\frac{1}{\lambda} - 1 \geq 0$, donc $\lambda \in]0, 1]$.

Réciproquement, si $\lambda \in]0, 1]$, $f : x \longmapsto x^{1/\lambda - 1}$ vérifie $\phi(f) = \lambda f$. Et le sev propre associé est $E_\lambda = \mathbb{R}x^{1/\lambda - 1}$.

b) Supposons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Par intégration des séries entières, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^n$.

Donc E_0 est bien stable par ϕ.

Supposons $g(x) = \lambda f(x)$ et f non identiquement nulle. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda a_n = \frac{1}{n+1} a_n$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ ou bien $\lambda = \frac{1}{n+1}$. Donc il existe un seul p tel que $a_p \neq 0$, et $\lambda = \frac{1}{p+1}$.

Ainsi, les valeurs propres de $\phi_{|E_0}$ sont les $\frac{1}{n+1}$, avec $n \notin \mathbb{N}$.

18) On a $f(x) = x + x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x tf(t)\,dt$. En déduire $f''(x) = f(x)$ et $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Variante : Via la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral, f vérifie (E) ssi $f'' = f$ et $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

En effet, f est C^∞, et l'application F définie par $F'' = f$ et $F(0) = 0$ et $F'(0) = 1$ doit vérifier $F(x) = f(x)$.

19) a) Montrer que nécessairement y est C^2 et $y''(x) = -y(x)$.

b) (*analyse*) : y est C^2, et même C^∞, et on a $y''(x) = e^x + y'(-x) = e^x + e^{-x} - y(x)$.

D'où on déduit $y(x) = a\cos x + b\sin x + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$; (*synthèse*) CNS : $b = -a$.

c) On pose $y(x) = u(x^2)$ sur $[0, +\infty[$ et $y(x) = v(x^2)$ sur $]-\infty, 0]$.

De sorte que $u'(x^2) = 2v(x^2)$ et $v'(x^2) = 2u(x^2)$, donc on se ramène au système (S) : $\begin{cases} u' = 2v \\ v' = 2u \end{cases}$

Lemme de Gronwall

20) a) Avec $y(x) = \lambda(x)e^{A(x)}$ et $z(x) = \mu(x)e^{A(x)}$, on obtient $\lambda'(x) \leq b(x)e^{-A(x)} = \mu'(x)$.

Comme $\lambda(0) = \mu(0)$, alors $\lambda(x) \leq \mu(x)$, donc $y(x) \leq z(x)$.

b) En considérant $Y(x) = \int_0^x a(t)y(t)\,dt$, on a $Y'(x) = a(x)y(x) \leq a(x)b(x) + a(x)Y(x)$.

On se ramène ainsi au type d'inéquation différentielle du a).