Oraux. Série n°28. Séries entières.

1) (♣) Montrer que le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ est > 0 ssi $\exists\,(q, M) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M q^n$.

2) (♣) (*Mines*) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

On note R et R' les rayons de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{a_n} x^n$. Comparer R et R'.

3) (♣) (*Mines*) On suppose que $\sum a_{2n} z^n$ et $\sum a_{2n+1} z^n$ sont de rayons R_0 et R_1.
Exprimer le rayon R de la série entière $\sum a_n z^n$ en fonction de R_0 et R_1.

4) (♣) Soient deux réels strictement positifs a et b. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $|u_{n+2}| \leq a\,|u_{n+1}| + b\,|u_n|$.

Montrer que la série entière $\sum u_n z^n$ est de rayon de convergence $R > 0$.

5) (♣) (*Mines*) Montrer que $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$ et $\sum \dfrac{A_n}{n!} z^n$ ont même rayon de convergence, où $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Développement en série entière

6) (♣) (*Mines*) Montrer que $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{x^2 + n^2}$ est DSE en 0.

Indication : On a $f(x) = g(x^2)$, avec $g(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{y+n^2}$. On vérifie $g^{(p)}(y) = (-1)^p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p!}{(y+n^2)^{p+1}}$.
Donc $\sup_{y\in[0,\beta]} \left| \frac{y^p}{p!} g^{(p)}(y) \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \beta^p$. Donc $\forall y \in [0,1[$, $g(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^p}{p!} g^{(p)}(0)$. Donc f DSE et $R \geq 1$.

7) (♣) (X) On considère $f : x \longmapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$, prolongée par continuité en 0.

a) Déterminer le $DL_2(0)$ de f.

b) Montrer que f est de classe C^∞.

c) Montrer que f est DSE au voisinage de 0 et que les coefficients de f sont rationnels.

7) bis) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$, et $\forall n \geq 1$, $a_n + \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_{n-k}}{k!} = 0$,

a) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ vérifie $R \geq 1$.

b) Montrer que pour $|z| < R$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \dfrac{2}{1 + e^z}$.

c) En déduire que tan est DSE au voisinage de 0.

8) (♣) a) Montrer que $f(x) = \exp(-\frac{1}{2}x^2) \int_0^x \exp(\frac{1}{2}t^2)\, dt$ est DSE en 0 sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + x f(x) = 1$, et en déduire $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n 2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

Développement en série entière (méthode de l'équation différentielle)

9) (♣) (*Mines*) On considère $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$.

Déterminer le rayon de convergence de f. Calculer f en utilisant une une équation différentielle vérifiée par f.

Calculs de sommes

10 (♣) Pour $x \in [0,1[$, montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$ converge, et calculer $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$.

Indication : Pour calculer $f(x)$, justifier d'abord que $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1) x^k$.

11) (♣) (*Centrale*) Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$. Montrer que $S_p = \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p}^{-1}$ converge, et que $S_p = \frac{p}{p-1}$.

Indication : Noter que $f^{(p)}(x) = \frac{p!}{1-x} et \forall k < p$, $f^{(k)}(0) = 0$, et utiliser Taylor-Lagrange avec reste intégral.

12) (♣) Déterminer le rayon et la somme $f(x)$ de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$ et calculer $f(x)$.

Séries entières et suites définies par récurrence

13) ($\clubsuit$) Soit r un entier ≥ 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre de mots de n lettres sur l'alphabet $\{0,1\}$ ne contenant pas r zéros consécutifs. On pose $a_0 = 1$. Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a) Montrer que le rayon de convergence de f est > 0.

b) Trouver une relation de récurrence entre les a_n.

Indication : Montrer que $\forall n \geq r$, $a_n = \sum_{s=0}^{r-1} a_{n-s-1}$ et $\forall n < r$, $a_n = 2^n$.

c) Trouver une expression de $f(x)$.

14) ($\clubsuit$) (*Mines*) On considère $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n$.

Montrer que le rayon de convergence de f est > 0. Calculer $f(x)$.

15) ($\clubsuit$) (*Centrale*) On considère $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

Déterminer le rayon de convergence R de $\sum u_n z^n$, et exprimer $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ par une fraction rationnelle.

Utilisation des séries entières dans la résolution d'équations différentielles

16) ($\clubsuit$) *Les deux questions sont indépendantes.*

a) Montrer que toute solution de $(E) : y'' + xy = 0$ est développable en série entière.

b) Déterminer une solution non nulle φ de $(E) : xy'' + y' + y = 0$ développable en série entière.
Exprimer une base des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ à l'aide de φ (méthode de l'abaissement du degré).

Utilisations des formules de Cauchy

17) ($\clubsuit$) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$..
On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Montrer que si f est bornée, alors f est constante.

Etude des fonctions définies par une série entière et étude aux bords du disque

18) ($\clubsuit$) (X) Exprimer $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(8n+1)(8n+5)}$ à l'aide d'une intégrale.

19) ($\clubsuit$) On considère $f(x) = \int_0^x \dfrac{\ln|1-y|}{y}\, dy$. Montrer que f est DSE en 0, et préciser son rayon de convergence R.
L'application f est-elle continue en $x = 1$? est-elle dérivable ?

20) ($\clubsuit$) (*ENS*) On considère $f : z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^{(n!)}$.

a) Déterminer le rayon de convergence de f.

b) Déterminer la limite de $f(t)$ lorsque le réel $t \in [0, 1[$ tend vers 1^-.

c) On considère $z = e^{2i\pi p/q}$ une racine de l'unité, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer le comportement de $f(tz)$ lorsque $t \in [0, 1[$ tend vers 1^-.

21) ($\clubsuit$) (*X-ENS*) Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive telle que $\sum b_n x^n$ est de rayon de cv $R = 1$.
On suppose de plus que $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$.
a) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_0 + a_1 + ... + a_n}{b_0 + b_1 + ... + b_n} = \lambda$.
b) Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est ≥ 1.
c) Montrer que $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n} = \lambda$.

Unicité des séries entières

22) (X) Montrer qu'il existe une unique série entière f telle que $\forall n \geq 2$, $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{1+n^2}$.