Oraux. Série n°28. Indications

1) Supposons $R > 0$. Alors pour tout $\rho > R$, $(a_n\rho^n)$ est bornée, donc $q = \frac{1}{\rho}$ convient.

Réicproquement, supposons $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq q^n$. Alors pour tout $\rho < \frac{1}{q}$, $(a_n\rho^n)$ est bornée, donc $R \geq \frac{1}{q}$.

2) On utilise $(a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée ssi $(\sqrt{a_n}\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée. Donc $R' = \sqrt{R}$.

3) Si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge, on a $f(z) + f(-z) = 2\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k}z^{2k}$ et $f(z) - f(-z) = 2\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}z^{2k+1}$.

On en déduit que $\sum a_n z^n$ ssi $\sum a_{2n}z^{2n}$ et $\sum a_{2n+1}z^{2n}$ convergent. Donc $R = \min(\sqrt{R_0}, \sqrt{R_1})$.

4) Notons $\rho > 0$ vérifiant $\rho^2 = a\rho + b$. Si $|u_n| \leq M\rho^n$ et $|u_{n+1}| \leq M\rho^{n+1}$, alors $|u_{n+1}| \leq M\rho^{n+2}$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M\rho^n$, où $M = \max(|u_0|, |u_1|)$.

5) On a $a_n = A_n - A_{n-1}$, donc le rayon R' de $\sum \dfrac{A_n}{n!}z^n$ est $\leq R$, où R est le rayon de $\sum \dfrac{a_n}{n!}z^n$.

Soit $\rho < R$. On a $|a_n| \leq \dfrac{M\ n!}{\rho^n}$, donc $\dfrac{|A_n|}{n!}\rho^n \leq M\left(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{k!}{n!}\rho^{n-k}\right) = M\left(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{\rho^k}{k!}\right) \leq Me^{\rho}$.

Développement en série entière

6) On a $f(x) = g(x^2)$, avec $g(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{y+n^2}$. On vérifie $g^{(p)}(y) = (-1)^p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p!}{(y+n^2)^{p+1}}$.

Donc $\sup_{y\in[0,\beta]} \left|\frac{y^p}{p!}g^{(p)}(y)\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y^p$. Donc $\forall y \in [0, 1[$, $g(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^p}{p!}g^{(p)}(0)$. Donc f DSE et $R \geq 1$.

7) b) $f(x) = 1/g(x)$, où $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!}x^n$ de classe C^∞.

c) On cherche une série entière $\sum b_n x^n$ vérifiant $g(x)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = 1$.

D'où $b_0 = 1$ et $b_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n-k}}{(k+1)!}$.

Sachant que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} = e - 2 < 1$, on a par récurrence forte $|b_n| \leq 1$.

On a aussi $b_n \in \mathbb{Q}$ par récurrence forte.

On obtient ainsi une fonction définie par une série entière, et inverse de g sur $]-1, 1[$. Il s'agit donc de f.

Remarque culturelle : en fait, le rayon de convergence de $\sum b_n x^n$ est 2π, mais ce résultat est difficile à montrer.

8) a) Intégration et produit de fonctions DSE de rayon $+\infty$. Le rayon de convergence est donc $R = +\infty$.

b) On a $f'(x) = -x\exp(-\frac{1}{2}x^2)\int_0^x \exp(\frac{1}{2}t^2)\,dt + 1$, donc $f'(x) + xf(x) = 1$.

Posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On obtient $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $(n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0$.

Donc $\forall n \geq 2$, $a_n = -\dfrac{1}{n}a_{n-2}$, donc $a_{2m} = 0$ et $a_{2m+1} = \dfrac{(-1)^m}{(2m+1)(2m-1)\ldots 3} = \dfrac{(-1)^m 2^m m!}{(2m+1)!}$.

Développement en série entière (méthode de l'équation différentielle)

9) Posons $a_n = \binom{2n}{n}$. On a $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{(2n)(2n-1)}{n^2} = 4\left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)$. Donc $na_n = 2(2n-1)a_{n-1}$.

Avec $na_n = 4(n-1)a_{n-1} + 2a_{n-1}$, on obtient $f'(x) = 4xf'(x) + 2f(x)$, donc $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

Calculs de sommes

10) Pour calculer $f(x)$, justifier d'abord que $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)x^k$.

11) $\binom{n}{p}^{-1} = \dfrac{p!}{n(n-1)...(n-p+1)} \sim \dfrac{p!}{n^p}$. Avec $f(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p}^{-1} x^n$, on a $f^{(p)}(x) = \frac{p!}{1-x}$.

Par Taylor-Lagrange, on a $S_p = f(1) = \int_0^1 \dfrac{(1-x)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(x)\ dx = p\int_0^1 (1-x)^{p-2}\ dx = \frac{p}{p-1}$.

12) Noter que $1^n + i^n + (-1)^n + (-i)^n = 4$ si $n \in 4\mathbb{N}$, et 0 sinon.

En déduire que $f(x) = \frac{1}{4}(e^x + e^{ix} + e^{-x} + e^{-ix}) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} x + \cos x)$

Séries entières et suites définies par récurrence

13) a) On a $a_n \leq 2^n$, donc le rayon vérifie $R \geq \frac{1}{2}$.

b) On partitionne les mots convenant selon le nombre s de zéros consécutifs situés à la fin du mot.

On en déduit que $\forall n \geq r$, $a_n = \sum_{s=0}^{r-1} a_{n-s-1}$. On a aussi $\forall n < r$, $a_n = 2^n$.

14) On a $a_{n+2} \leq a_{n+1} + 2a_n + 1$, donc $a_n \leq b_n$, où $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ et $b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n + 1$.

Or, $b_n = -\frac{1}{2} + \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$, avec λ et μ racines de $z^2 = z + 2$, c'est-à-dire $\lambda = -1$ et $\mu = 2$.

Donc $b_n = O(2^n)$, et a fortiori le rayon de convergence de f vérifie $R \geq \frac{1}{2}$.

On a $\forall x \in]-R, R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}x^{n+2} = x\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} + 2x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + (-1)^n \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+2}$.

Donc $f(x) - x = xf(x) + 2x^2 f(x) + \frac{x^2}{1+x}$, donc $f(x) = \frac{x(1+x+x^2)}{(1+x)(1-x-2x^2)}$.

15) On a (suite de Fibonacci) : $u_n = \alpha\varphi^n + \beta\psi^n$, où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = -\frac{1}{\varphi}$. On a $\alpha \neq 0$, car $u_1 \neq u_0\psi$.

Donc $u_n \sim \alpha\varphi^n$, et $R = \frac{1}{\varphi}$ ($= \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n+1}{u_n}$).

On a $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n = z + \sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + u_{n-1})z^{n+1} = z + (z + z^2)F(z)$, donc $F(z) = \dfrac{z}{1 - z - z^2}$.

Autre méthode : On a $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha\varphi^n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \beta\psi^n z^n = \alpha\frac{1}{1-\varphi z} + \beta\frac{1}{1-\psi z}$, et on calcule (α, β) avec (u_0, u_1).

Utilisation des séries entières dans la résolution d'équations différentielles

16) a) $y(x) = \sum a_n x^n$ de rayon $R > 0$ vérifie (E) ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+3} = \frac{-1}{(n+2)(n+3)} a_n$ et $a_2 = 0$.

Ainsi, on obtient $y(x) = a_0\varphi(x^3) + a_1 x\psi(x^3)$, avec φ et ψ fonctions définies par des séries entières de rayon $+\infty$.

Donc l'espace S_0 des fonctions développables en une séries entière (sur $\mathbb{R}$) est un ev de dimension 2.

Or, par Cauchy-Lipschitz, l'ev S des solutions est lui-aussi un $\mathbb{R}$-ev de dim 2. Donc $S_0 = S$.

b) $y(x) = \sum a_n x^n$ de rayon $R > 0$ vérifie (E) ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+3)(n+1)a_{n+1} + a_n = 0$.

Donc $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{2}{(n!)^2(n+2)} x^n$ convient sur $\mathbb{R}$ (on ne peut pas exprimer φ à l'aide des fonctions usuelles).

On résout ensuite (E) sur $]0, +\infty[$ en posant $y(x) = z(x)\varphi(x)$. On obtient $x\varphi z'' + (2x\varphi' + \varphi)z' = 0$.

Donc $z'(x) = A\exp(\int -\frac{2\varphi'}{\varphi} - \frac{1}{x}) = \dfrac{A}{x\varphi(x)^2}$. Donc $y(x) = A\ \varphi(x) \int_{x_0}^{x} \dfrac{dt}{t\varphi(t)^2} + B\varphi(x)$.

Remarque : En réalité, on doit résoudre sur les intervalles où φ ne s'annule pas.

En les points où φ s'annule, l'application $x \longmapsto \varphi(x) \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t\varphi(t)^2}$ se prolonge par continuité.

En effet, on a par exemple $\lim_{x\to a}(x-a)\int_{x_0}^{x}\frac{1}{(t-a)^2}\,dt=-1$, et de même $\lim_{x\to a}(x-a)\int_{x_0}^{x}\frac{1}{t(t-a)^2}\,dt=-\frac{1}{a}$.

Utilisations des formules de Cauchy

17) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $r\in\mathbb{R}^+$, $|a_n|\,r^n\le\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\left|f(re^{i\theta})\right|$.

Etude des fonctions définies par une série entière et étude aux bords du disque

18) Considérer $\forall x\in[0,1[$, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{8n+5}}{(8n+1)(8n+5)}$.

Montrer $\forall x\in[0,1[$, $f'(x)=x^3\int_0^x\frac{dt}{1-t^8}$, donc $f(x)=\frac{x^4}{4}\int_0^x\frac{dt}{1-t^8}-\frac{1}{4}\int_0^x\frac{t^4}{1-t^8}\,dt$.

Montrer aussi que f est continue sur $[0,1]$, et en déduire avec soin que $S=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{dt}{1+t^4}$.

19) Montrer que $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$. En déduire que $R=1$, et f définie et continue en $x=1$.

Montrer aussi (directement) que $\lim_{x\to1,x<1}f'(x)=+\infty$, et en déduire que $\lim_{x\to1,x<1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$. Conclure.

20) a) $R=1$: La série diverge en $z=1$ et la suite des coefficients est en $O(1)$.

b) On a $\lim_{t\to1,t<1}f(t)=+\infty$. En effet, la limite existe car f est croissante sur $[0,1[$.

De plus, $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(t)\ge\sum_{k=0}^{n}t^{(k!)}$, donc $\lim_{t\to1,t<1}f(t)\ge(n+1)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

c) Pour $n\ge q$, $\frac{p}{q}n!$ est un entier, donc $\forall n\ge q$, $z^{n!}=1$. Donc $\lim_{t\to1,t<1}f(tz)=+\infty$.

21) a) Quitte à considérer $a'_n=a_n-\lambda b_n$, on se ramène au cas où $\lambda=0$. Soit $\varepsilon>0$.

Pour $n\ge n_0$ assez grand, on a $|a_n|\le\varepsilon b_n$, donc $\forall n\ge n_0$, $|A_n|\le|A_{n_0}|+\varepsilon B_n$, donc $|A_n|/B_n\le2\varepsilon$ pour n assez grand.

b) Résulte du cours (théorème de comparaison, car $a_n=O(b_n)$).

c) On se ramène à nouveau au cas où $\lambda=0$. On reprend les notations du a) :

On a pour $x\in[0,1[$ et $n\ge n_0$, $\left|\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right|\le\left|\sum_{n=0}^{n_0}a_nx^n\right|+\varepsilon\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$.

Il reste à justifier que $\lim_{x\to1^-}(\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n)=+\infty$, ce qui résulte de $\lim_{x\to1^-}(\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n)\ge\sum_{n=0}^{p}b_n$ pour tout $p\in\mathbb{N}$.

22) La série entière $g(x)=\frac{x}{1+x}$ convient (de rayon de cv $R=1$). Montrons que c'est la seule.

En posant $\delta=(f-g)$, on a $\forall n\ge2$, $\delta(\frac{1}{n})=0$. Il s'agit de prouver que $\forall p\in\mathbb{N}$, $\delta^{(p)}(0)=0$.

On raisonne par l'absurde : Il existe alors un plus petit entier p tel que $\delta^{(p)}(0)\ne0$.

Alors $\delta(x)\sim\frac{\delta^{(p)}(0)}{p!}x^p$, donc en particulier, $\delta(\frac{1}{n})\sim\frac{\delta^{(p)}(0)}{p!}\frac{1}{n^p}$, ce qui contredit $\delta(\frac{1}{n})=0$.