Oraux. Série n°27 Séries de fonctions

Continuité et régularité

1) (♣) a) Montrer que $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+n^2x}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

Montrer que $f(x) \sim \dfrac{\pi}{2x}$ quand x tend vers 0^+ et que $f(x) \sim \dfrac{\pi^2}{6x^2}$ quand x tend vers $+\infty$.

b) (*Mines*) Montrer que $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+nx}$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$.

Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0 et un équivalent lorsque x tend vers $+\infty$.

2) (♣) (*extrait écrit Centrale*) On considère $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{x+k}\right)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition D de f.

b) Montrer que f est de classe C^∞ sur D. Préciser la monotonie de f.

c) Calculer $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

3) (♣) (*Mines*) a) Montrer que $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$.

Préciser la monotonie de f sur $]0,+\infty[$.

b) Pour $x > 0$, déterminer une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$. En déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

c) Déterminer un équivalent de $f(x)$ en 0.

4) (♣) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{pn+1} = \int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^p}$.

5) (♣) (*Mines*) a) Déterminer le domaine de définition de $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$.

b) Etudier la continuité de f. Montrer ensuite que f est de classe C^1.

c) Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \int_0^1 \dfrac{t^x}{1+t}\, dt$.

d) Donner un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

Equations fontionnelles

6) (♣) Soit $0 < q < 1$.

a) On considère $f_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (1-q^k x)$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge sur $[0,+\infty[$ vers une fonction continue f.

b) Montrer que f est l'unique fonction continue sur $[0,+\infty[$ vérifiant $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1-qx)f(qx)$.

7) (♣) (*Mines*) Soit $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On définit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt$.

Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment. Calculer $F(x)$.

Etude de convergence

8) (♣) (X) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ existe et f' intégrable.

a) Montrer que f converge vers 0 en $+\infty$.

b) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n)$ converge uniformément sur tout intervalle $[a,+\infty[$.

9) (♣) (*Centrale*) On considère $\forall x \geq 0,\ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k+x}} - 2\sqrt{n}$.

a) En considérant $\sum (f_{n+1} - f_n)$, montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction de classe C^1.

b) Calculer $\int_0^1 f(x)\, dx$.

10) (♣) (*Centrale*) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2.

Donner une CNS pour que $\sum t^n f(t)$ converge normalement sur $[0, 1]$.

Remarque : Il est plus léger de considérer (via $x = 1 - t$) le problème équivalent pour $\sum (1 - x)^n g(x)$.