Oraux. Série n°27. Séries de fonctions

Continuité et régularité

1) a) Il y a cv normale sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, avec $a > 0$, donc f est continue sur $]0, +\infty[$.

En 0, utiliser une comparaison avec $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+(tx)^2} = \frac{1}{x}[\arctan(tx)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}$.

En $+\infty$, utiliser le th d'interversion des limite avec $xf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2} \to_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$(par cv normale).

b) Il y a cv normale sur donc f est continue sur $]0, +\infty[$.

Pour un équivalent en 0 et en $+\infty$, utiliser une comparaison avec des intégrales.

On a en effet $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+tx} \leq f(x) \leq \frac{1}{1+x} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+tx}$, et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+tx} = \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt = \frac{1}{x}\ln(1+x)$.

On en déduit par pincement que $f(x) \sim \frac{1}{x}\ln x$.

2) a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-k,\, k \in \mathbb{N}^*\}$. En effet, la série converge pour $x \in D$, car $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right) \sim \frac{1}{n^2}$.

b) Posons $f_k(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{x+k}$. On a $f_k^{(p)}(x) = \frac{(-1)^{p+1}\ p!}{(x+k)^{P+1}}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,la série de fonctions $\sum f_k^{(p)}$converge normalement sur tout segment $[a, b] \subset D$.

Donc f est de classe C^∞ sur D, et $f^{(p)}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}\ p!}{(x+k)^{P+1}}$.

c) Par télescopage, on a $f(n) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} \sim \ln p$. Or, par b), f' est positive sur $\mathbb{R}^+$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(n) \leq f(x) \leq f(n+1)$, où $n = \lfloor x \rfloor \sim x$ en $+\infty$, donc par pincement $f(x) \sim \ln x$ en $+\infty$.

3) Posons $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$. On a $f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$.

Donc la série $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ où les f_n sont définies.

On a $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$, de signe négatif (cf sommes alternées) sur $]0, +\infty[$. Donc f décroît sur $]0, +\infty[$.

b) On a $f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x}$. Comme f est décroissante sur $]0, +\infty[$, $f(x) \geq \frac{1}{2x}$ et $f(x+1) \leq \frac{1}{2x}$.

On en déduit par pincement que $f(x) \sim \frac{1}{2x}$.

Remarque : On peut aussi trouver cet équivalent par comparaison avec une intégrale.

c) On a $f(x) = \frac{1}{x} + O(1)$, puisque la focntion $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ est continue en 0. Donc $f(x) \sim \frac{1}{x}$.

4) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{pn+1}}{pn+1}$. On a $\forall x \in [0, 1[$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{pn} = \frac{1}{1+x^p}$.

De plus, par cv uniforme, f est continue en $x = 1$. Donc $f(1) = \lim_{x\to1, x<1} \int_0^x f'(t)\ dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^p}$.

Remarque : $\forall t \in [0, 1[$, $\frac{1}{1+t^p} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{pn}$, mais il n'y a pas cv uniforme sur $[0, 1]$, et ITT ne s'applique pas.

5) a) Si $x \geq 0$, séries alternées ; si $x \in]-1, 0[$, diverge par comparaison.

b) Convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[a, +\infty[$; On a $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+x}$: cv uniforme de $\sum f_n'$ sur $]0, +\infty[$.

c) Utiliser $\frac{1}{1+t}t^x = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k t^{x+k} + (-1)^{n+k}\frac{1}{1+t}t^{x+n}$, et $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^{x+n}\ dt = 0$. On ne peut pas utiliser ITT.

d) Utiliser c) : On a $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \ln 2$, donc $f'(0)$ existe et vaut $\ln 2$ (th du prolongement C^1).

En $+\infty$, par IPP, on a $f'(x) = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc $f(x) = \ln x + O(1)$.

Equations fontionnelles

6) a) Soit $a > 0$. Pour $n \geq n_0$ assez grand, $q^n a < 1$ et $\forall x \in [0, a]$, $|\ln(1 - q^n x)| \leq |\ln(1 - q^n a)| = O(q^n)$.

Donc $\sum_{n\geq n_0} \ln(1 - q^n x)$ converge normalement sur $[0, a]$, donc la somme S, définie sur $[0, a]$, est continue.

Et $\forall x \in [0,a]$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \left(\prod_{k=0}^{n_0}(1-q^k x)\right) \exp\left(\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \ln(1-q^n x)\right)$. Donc f continue sur $[0,a[$ pour tout a..

b) Vérifier que la fonction définie au a) vérifie la propriété.

Réciproquement, supposons F continue sur $[0,+\infty[$ vérifiant $F(0)=1$ et $F(x)=(1-qx)F(qx)$.

Montrer que $F(x) = \prod_{k=1}^{n}(1-q^k x)F(q^{n+1}x)$, et en déduire par continuité en 0 que $F(x) = f(x)F(0) = f(x)$.

7) Poser $M = \sup_{[-a,a]} |f_0|$. Montrer que $\forall x \in [-a,a]$, $|f_n(x)| \leq \frac{x^n}{n!}M$.

En utilisant la convergence normale, montrer que $F' = f_0 + F$, donc $F(x) = e^x \int_0^x f_0(t)e^{-t}\, dt$.

Etude de convergence

8) a) Utiliser $\int f'$ pour justifier que f converge en $+\infty$, et déduire de la convergence de $\int f$ que $\lim_{+\infty} f = 0$.

b) Justifier $\forall y$, $\left| f(y) - \int_y^{y+1} f(t)\, dt \right| \leq \int_y^{y+1} |f'(t)|\, dt$. Puis on utilise ces inégalités :

Déduire de f' intégrable que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(f(x+n) - \int_{x+n}^{x+n+1} f(t)\, dt \right)$ converge.

En déduire que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(x+n)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a ensuite $\left| \sum_{n=p}^{+\infty} f(x+n) \right| \leq \left| \int_{x+p}^{+\infty} f(t)\, dt \right| + \int_{x+p}^{+\infty} |f'(t)|\, dt$.

La fonction $F(y) = \int_0^{+\infty} f(y+t)\, dt = \int_y^{+\infty} f(t)\, dt$ converge vers 0 lorsque $y \to +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $a \geq 0$. Pour p assez grand, $\int_{a+p}^{+\infty} |f'(t)|\, dt \leq \varepsilon$ et on a $\sup_{[a+p,+\infty[} |F(x)| \leq \varepsilon$.

D'où pour p assez grand, on a $\forall x \geq a$, $\left| \sum_{n=p}^{+\infty} f(x+n) \right| \leq 2\varepsilon$.

9) a) Pour x fixé, $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \left| \frac{1}{\sqrt{n+1+x}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \right| = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

De plus, $(f_{n+1} - f_n)'(x) = \frac{-1}{2(n+x+1)^{3/2}}$ d'où la cv normale de $\sum (f_{n+1} - f_n)'$ sur $[0,+\infty[$.

b) On a $\int_0^1 f_n(x)\, dx = \left(2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n}\right) \to -2$.

La cv normale de $\sum (f_{n+1} - f_n)'$ sur $[0,+\infty[$ assure la cv normale de $\sum (f_{n+1} - f_n)$ sur tout segment, donc a fortiori sur $[0,1]$. On en déduit que $\int_0^1 f = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = -2$, puisque $f_n - f_0$ est une somme partielle de $\sum (f_{n+1} - f_n)$.

On pourrait aussi prouver que le théorème de convergence dominée s'applique.

10) Il est nécessaire que $g(0) = 0$. Et que $\sum g(\frac{1}{n})$ converge, donc $g'(0) = 0$.

Réciproquement, si $g'(0) = 0$, justifier l'existence de M tel que $|g(x)| \leq Mx^2$, et conclure.