Oraux. Série n°26. Suites de fonctions et approximations uniformes

Exemples d'études de suites de fonctions

1) a) (♣) Soit un réel $\alpha > 0$. On pose $f_n(x) = n^\alpha x^n(1-x)$.
Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout intervalle $[0,a[$, avec $a < 1$.
Pour quelles valeurs de α la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

b) On considère $g_n(\theta) = (\cos\theta)^n(\sin\theta)$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Etudier la convergence uniforme de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2) (♣) (*extrait ENS*) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $g_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$.
Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $f : x \longmapsto e^{-x}$ sur $[0,+\infty[$.

3) (♣) *Convergence uniforme des suites équi-lipschitziennes***.** Soit $K > 0$ fixé.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions lispchitziennes de même rapport K convergeant simplement vers g sur $[0,1]$.

Montrer que g est K-lispchitzienne et que la convergence est uniforme.

Indication : On a $|f_n(x) - f_n(y)| \leq K|x-y|$, donc par limite simple, $|g(x) - g(y)| \leq K|x-y|$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $J_p = \{0, \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, ..., \frac{p-1}{p}, 1\}$. L'ensemble J_p est fini.
En déduire que $\lim_{n\to+\infty}\sup_{J_p}|f_n - g| = 0$, c'est-à-dire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur J_p.
Conclure en montrant que $\|f_n - g\|_\infty \leq \sup_{J_p}|f_n - g| + 2\frac{K}{p}$ et en appliqaunt le pincement avec ε.

Normes

4) (♣) (*Centrale*) Soient $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$.
On note E^+ l'ensemble des applications $f \in E$ positives ne s'annulant qu'un nombre fini de fois.

On dit deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes ssi il existe k et $l > 0$ tel que $kN_1 \leq N_2 \leq lN_1$.

a) Pour $\varphi \in E^+$ et $f \in E$, on pose $\|f\|_\varphi = \int_0^1 |f(t)|\varphi(t)\,dt$. Montrer que $\|\ \|_\varphi$ est une norme sur E.
b) Montrer que si φ_1 et φ_2 sont deux applications strictement positives de E, alors les normes associés sont équivalentes. *Indication* : Considérer les valeurs minimales et maximales de φ_2/φ_1.

c) On prend $\varphi_1(x) = x$ et $\varphi_2(x) = x^2$. Les normes associées sont-elles équivalentes ?

Utilisations de Stone-Weierstrass

5) (♣) *Lemme de Riemann-Lebesgue.*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Pour tout $\lambda > 0$, on pose $I_\lambda(f) = \int_a^b f(t)\,e^{i\lambda t}\,dt$.

a) On suppose f de classe C^1. Trouver une cosntante M (en fonction de f et f') telle que $|I_\lambda(f)| \leq \dfrac{M}{\lambda}$.

b) On suppose φ en escaliers sur $[a,b]$. Trouver une constante M telle que pour tout $\lambda > 0$, $|I_\lambda(\varphi)| \leq \dfrac{M}{\lambda}$.

c) Montrer que pour toute fonction continue par morceaux f, on a $\lim_{\lambda\to+\infty} I_\lambda(f) = 0$.

6) (♣) (X) Soient $g \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ et $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que g est 1-périodique.
Calculer $L = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g(t)f(nt)\,dt$.
Remarque : On peut se douter que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t)g(nt)\,dt = m\int_0^1 f(t)\,dt$, où m est la valeur moyenne de g.
7) (♣) a) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\forall k \in \{0,1,...,n\}$, $\int_0^1 t^k P(t)\,dt = 0$. Montrer que $P = 0$.

b) Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 t^k f(t)\,dt = 0$. Montrons que $f = 0$.

8) (♣) (*ENS*) Soient X et Y deux v.a.r. bornées à valeurs dans $[0,1]$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(X^n) = E(Y^n)$.
a) Montrer que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, $E(Q(X)) = E(Q(Y))$.
b) On suppose ici que X et Y prennent un nombre fini de valeurs. Déduire de a) que X et Y ont mêmes lois.

c) Montrer que pour toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $E(f(X)) = E(f(Y))$.

d) Soit $a \in [0,1]$.

Expliciter, pour $\varepsilon > 0$, une fonction continue $f_\varepsilon : [0,1] \to [0,1]$ telle que $f_\varepsilon(a) = 1$ et $\forall x \notin [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, $f(x) = 0$.

Montrer que $\lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} E(f_\varepsilon(X)) = P(X = a)$.

e) Déduire des questions précédentes que X et Y ont mêmes lois.

Théorème de Stone-Weierstrass

9) (♣) a) Soit f une fonction k-lipschitzienne sur $[0,1]$.

Soit $x \in [0,1]$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables qui suivent une loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$. On pose $X_n = \frac{1}{n} S_n$.

Montrer que $|E(f(X_n)) - f(x)| \leq k\ \sqrt{V(X_n)}$.

b) En déduire que toute fonction lipschitzienne sur $[0,1]$ est limite uniforme de fonctions polynômes.

c) On sait que toute fonction continue est limite uniforme de fonctions (continues) affines par morceaux.

Montrer que toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme de fonctions polynômes.

d) Montrer que toute fonction continue f sur un segment $[a,b]$ est limite uniforme sur $[a,b]$ de fonctions polynômes.

e) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que $\|P_n' - f'\|_\infty \to 0$ et $\|P_n - f\|_\infty \to 0$.

Régularisation par convolution

10) (♣) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue intégrable.

Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telle que :

(i) g_n est positive et $\int_{\mathbb{R}} g_n = 1$; (ii) $\forall \alpha > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \int_{[-\alpha,\alpha]} g_n = 1$; (iii) $\forall \alpha > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \sup_{|x|\geq\alpha} g_n(x) = 0$.

On pose $F_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\ dt = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\ dt$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = f(x)$.

Uniforme continuité et théorème de Heine

On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0, \forall (x,y) \in I^2,\ |x-y| \leq \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \alpha$$

Par exemple, une fonction K-lipschitzienne est uniformément continue : on prend $\alpha = \frac{1}{K}\varepsilon$.

Remarque : On pose $\delta(f,\alpha) = \sup_{|x-y|\leq\alpha}\ |f(x) - f(y)|$ (le sup porte sur les $(x,y) \in I^2$ vérifiant $|x-y| \leq \varepsilon$).
Alors f est uniformément continue ssi $\lim_{\alpha\to 0} \delta(f,\alpha) = 0$.

11) **(♣)** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un segment I.

On sait qu'on peut approcher f uniformément par des fonctions en escaliers.

En déduire que f est uniformément continue (*théorème de Heine*).

Indication : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe φ en escaliers tel que $\|f - \varphi\|_\infty$. On note Δ le pas de la subdivision.
En un point z de la subdivision de φ, $|\lim_{z^+} \varphi - \lim_{z^-} \varphi| \leq |\lim_{z^+} \varphi - f(z)| + |f(z) - \lim_{z^-} \varphi| \leq 2\varepsilon$.
En déduire que pour tous $(x,y) \in I^2$, $|x-y| < \Delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 4\varepsilon$.

12) **(★)** (X) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[0,1]$ et croissantes, convergeant simplement vers une fonction continue f sur $[0,1]$. Montrer que f est croissante et la convergence est uniforme sur $[0,1]$.

Indication : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $J_p = \{0, \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, ..., \frac{p-1}{p}, 1\}$. L'ensemble J_p est fini.
En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \sup_{J_p} |f_n - f| = 0$, c'est-à-dire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur J_p.
En utilisant le fait que les f_n et donc f sont croissantes, montrer que $\|f_n - f\|_\infty \leq \sup_{J_p} |f_n - f| + \delta(f, \frac{1}{p})$.