Oraux. Série n°26. Indications

Exemples d'études de suites de fonctions

1) a) On a $\sup f_n = f_n(\frac{n}{n+1}) \sim n^{\alpha-1}e^{-1}$, car $(1-\frac{1}{n}+\mathfrak{o}\,(\frac{1}{n}))^n \sim e^{-1}$. D'où la NCS : $\alpha < 1$.

b) Se déduit de a) par changement de variable $x = (\cos\theta)^2$.

2) Par Taylor-Lagrange à l'ordre 2, on a : $\forall u \geq 0$, $0 \leq \ln(1+u) - u \leq \frac{1}{2}u^2$.

Donc $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq e^{-x}\left(1 - e^{n\ln(1+x/n)-x}\right) \leq e^{-x}(1-e^{-(1/2n)x^2})$, car $n\ln(1+\frac{x}{n}) - x \leq \frac{1}{2n}x^2$.

On choisit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}x_n^2 = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, par exemple $x_n = n^{1/3}$.

On a $\forall x \in [0, x_n]$, $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq (1-e^{-(1/2n)x_n^2}) \to 0$. Et $\forall x \geq x_n$, $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq e^{-x_n} \to 0$.

Donc $\sup_{[0,+\infty[}|f_n - f| \leq \max(1-e^{-(1/2n)x_n^2}, e^{-x_n}) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Autre solution : On fixe ε. Pour $x \geq a$ assez grand, $e^{-a} \leq \varepsilon$, donc $\forall x \in [a,+\infty[$, $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \varepsilon$.

Pour $n \geq n_0$ assez grand, $(1-e^{-(1/2n)a^2} \leq \varepsilon$ (car la limite vaut 0 pour $n \to +\infty$).

Donc pour $n \geq n_0$, $(f - f_n) \leq \varepsilon$ sur $[0,a]$, donc sur $[0,+\infty[$. D'où le résultat : $\lim_{n\to+\infty}\sup_{[0,+\infty[}|f_n - f| = 0$.

3) Posons $J_p = \{0, \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, ..., \frac{p-1}{p}, 1\}$. L'ensemble J_p est fini.

Soit $\varepsilon > 0$. Justifier que pour n assez grand, $\forall x \in J_p$, $|f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$. En déduire $\|f_n - g\|_\infty \leq \varepsilon + 2\frac{K}{p}$.

3) bis) *Remarque* : Contre-exemple lorsque f n'est pas supposée continue : $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$.

Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une subdivision $\sigma = (x_0 = 0, x_1, ..., x_{p-1}, x_p = 1)$ de $[0,1]$ telle que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \varepsilon$. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $J = \{x_k,\ k \in [\![0,n]\!]\}$. il existe donc n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $|f(x_k) - f_n(x_k)| \leq \varepsilon$.

En déduire que $\sup_{[0,1]}|f - f_n| \leq 3\varepsilon$.

Normes

4) a) Noter que si f s'annule sur une partie dense, f est nulle partout (par continuité).

b) Considérer les valeurs minimales et maximales de φ_2/φ_1.

c) Prendre $f_n(x) = (1-x)^n$. Alors $\|f_n\|_1 \sim \frac{1}{n}$ et $\|f_n\|_2 \sim \frac{1}{n^2}$, donc $\|\ \|_1 / \|\ \|_2$ n'est pas majorée.

Utilisations de Stone-Weierstrass

5) a) $I_\lambda(f) = \dfrac{1}{i\lambda}\left[f(t)\ e^{i\lambda t}\right]_a^b - \dfrac{1}{i\lambda}\int_a^b f'(t)\ e^{i\lambda t}\ dt$. Donc $|I_\lambda(f)| \leq \dfrac{M}{\lambda}$, où $M = |f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\ dt$.

b) Soient $(x_0, x_1, ..., x_n)$ une subdivision de $[a,b]$. On suppose $\varphi_{|]x_{k-1},x_k[} = a_k$.

Alors $I_\lambda(f) = \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{i\lambda}\left[a_k\ e^{i\lambda t}\right]_a^b$, donc $|I_\lambda(f)| \leq \dfrac{M}{\lambda}$, où $M = \sum_{k=1}^n 2\,|a_k|$.

c) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe φ fonction en escaliers telle que $\sup_{[a,b]}|f - \varphi| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$.

Le point essentiel est de noter que $\forall\lambda > 0$, $|I_\lambda(f) - I_\lambda(\varphi)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. On a ainsi une majoration uniforme en λ.

Par b), on a pour λ assez grand, $|I_\lambda(\varphi)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$, d'où $|I_\lambda(f)| \leq |I_\lambda(f) - I_\lambda(\varphi)| + |I_\lambda(\varphi)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$.

Donc $\lim_{\lambda\to+\infty} I_\lambda(f) = 0$.

6) En retranchant m, on se ramène au cas $m = 0$. Dans ce cas, G est continue 1-périodique, donc bornée.

En intégrant par parties, on a $\int_0^1 f(t)g(nt)\ dt = \frac{1}{n}f(1)G(n) - \frac{1}{n}\int_0^1 f'(t)G(nt)\ dt$, où $G(x) = \int_0^x .g$.

Donc $\left|\int_0^1 f(t)g(nt)\ dt\right| \leq \frac{K}{n}$, avec $K = \sup|G|\left(|f(1)| + \int_0^1 |f'(t)|\ dt\right)$. Par pincement, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)g(nt)\ dt = 0$.

6) bis) Se ramener au cas où v est de moyenne nulle. Noter que si u est C^1, utiliser IPP.

Dans le cas général, approcher u par des fonctions en escaliers associée à une subdivision de pas $\frac{T}{n}$.

7) a) Par linéarité, $\int_0^1 P(t)^2\ dt = 0$: en effet, P est orthogonal aux X^k, donc à tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) En effet, par linéarité, f est orthogonale à tout polynôme P : On a $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_0^1 P(t)f(t)\ dt = 0$.

Or, par Stone-Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telles que $\lim_{n\to+\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$.

On obtient alors aisément $\int_0^1 f(t)^2\ dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 P_n(t)f(t)\ dt = 0$. Donc f est l'application nulle.

8) a) Utiliser la linéarité de l'espérance.

b) Utiliser l'interpolationd e Lagrange : pour tout a, il existe un polynôme P tel que $P(a) = 1$ et $P(b) = 0$ pour toute autre valeur prise par X ou Y. Déduire de a) que $P(X = a) = P(Y = a)$.

c) Utiliser le th. de Stone-Weierstrass :

il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définis sur $[0,1]$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$.

On a alors $\lim_{n\to+\infty} E(P_n(X)) = E(f(X))$, car $|E(f(X)) - E(P_n(X))| \leq E(\|f - P_n\|_\infty) = \|f - P_n\|_\infty$.

d) Il suffit de choisir une fonction affine par morceaux (fonction triangle) et la restreindre si nécessaire à $[0,1]$ dans le cas où $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ n'est pas inclus dans $[0,1]$.

On a $\sup|f_\varepsilon| = 1$ (il est important pour laz suite que cette valeur soit uniformément majorée en ε).

On a $|E(f_\varepsilon(X)) - P(X = a)| \leq P(X \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ et $X \neq a)$.

Or, par continuité décroissante, $\lim_{\varepsilon\to 0, \varepsilon>0} P(X \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ et $X \neq a) = P(X \in \emptyset) = 0$: en effet, on considère une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0, et on note que $\cap_{n=0}^{+\infty} ([a-\varepsilon_n, a+\varepsilon_n] \setminus \{a\}) = \emptyset$.

Théorème de Stone-Weierstrass

9) a) $|E(f(X_n)) - f(x)| = E(|f(X_n) - f(x)|) \leq k\ E(|X_n) - x|) \leq k\sqrt{V(X_n)}$.

b) Considérer $P_n(x) = E(f(X_n)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

d) Considérer $g : [0,1] \to \mathbb{R}\quad g(\theta) = f(a + \theta(b-a))$ et $\|Q_n - g\| \to 0$ et $P_n(x) = Q_n(\frac{x-a}{b-a})$.

e) Considérer $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|Q_n - f'\|_\infty$, et considérer $P_n(x) = \int_a^x Q_n(t)\ dt$.

Régularisation par convolution

10) Les g_n sont bornées, d'où l'existence de $\int_\mathbb{R} f(t)g_n(x-t)\ dt$, car $f(t)g_n(x-t)\ = O_{\pm\infty}(f(t))$.

Ensuite, on fixe x, et on utilise :

$|F_n(x) - f(x)| \leq \int_\mathbb{R} |f(x-t) - f(x)|\, g_n(t)\ dt \leq 2\sup_{|t|\geq\alpha} g_n(t) \int_{\mathbb{R}\setminus[-\alpha,\alpha]} |f| + \sup_{|t|\leq\alpha} |f(x-t) - f(x)| \int_{[-\alpha,\alpha]} g_n$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en x, il existe $\alpha > 0$ tel que $\sup_{|t|\leq\alpha} |f(x-t) - f(x)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$.

On a $2\sup_{|t|\geq\alpha} g_n(t) \int_{\mathbb{R}\setminus[-\alpha,\alpha]} |f| \leq 2\sup_{|t|\geq\alpha} g_n(t) \int_\mathbb{R} |f| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ pour n assez grand. lorsque $n \to +\infty$. Conclure.

Uniforme continuité

11) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe φ en escaliers telle que $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.

On a $|f(x) - f(y)| \leq |\varphi(x) - \varphi(y)| + 2\sup|f - \varphi| \leq |\varphi(x) - \varphi(y)| + 2\varepsilon$.

Pour $|x - y| < \Delta$ pas de la subdivision associée à φ, $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq 2\varepsilon$. En effet, φ admet au plus un saut sur $[x,y]$ en un point z, et $|\lim_{z^+}\varphi - \lim_{z^-}\varphi| \leq |\lim_{z^+}\varphi - f(z)| + |f(z) - \lim_{z^-}\varphi| \leq 2\varepsilon$.

Donc, $\forall (x,y) \in I^2$, $|x - y| < \Delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 4\varepsilon$. On en déduit que f est uniformément continue.

12) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $J_p = \{0, \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, ..., \frac{p-1}{p}, 1\}$. L'ensemble J_p est fini.

En déduire que $\lim_{n \to +\infty} \sup_{J_p} |f_n - f| = 0$, c'est-à-dire que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur J_p.

En utilisant le fait que les f_n et donc f sont croissantes, on a $\|f_n - f\|_\infty \leq \sup_{J_p} |f_n - f| + \delta(f, \frac{1}{p})$:

En effet, pour tout $x \in [\frac{k-1}{p}, \frac{k}{p}]$, on a $f_n(\frac{k-1}{p}) \leq f_n(x) \leq f_n(\frac{k}{p})$ et $f(\frac{k-1}{p}) \leq f(x) \leq f(\frac{k}{p})$.

Donc $|f_n(x) - f(x)| \leq \max(f_n(\frac{k}{p}) - f(\frac{k-1}{p}), f(\frac{k}{p}) - f_n(\frac{k-1}{p})) \leq \sup_{J_p} |f_n - f| + \left(f(\frac{k}{p}) - f(\frac{k-1}{p})\right)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par le th de Hiene (cf 11)), il existe p tel que $\delta(f, \frac{1}{p}) \leq \varepsilon$.

Pour n assez grand, $\sup_{J_p} |f_n - f| \leq \varepsilon$, donc pour n assez grand, $\|f_n - f\|_\infty \leq 2\varepsilon$. D'où le résultat.