Oraux. Série n°25. Espaces vectoriels normés dans les matrices

1) (♣) (*Centrale*) a) Montrer que $N(A) = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $|\text{tr}\, A| \leq \sqrt{n} N(A)$.

c) Montrer que pour $U \in O_n(\mathbb{R})$, $N(AU) = N(UA) = N(A)$.

d) Montrer que $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

e) Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique $S \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $N(A - S) = \inf_{M \in S_n(\mathbb{R})} N(A - M)$.

Exprimer S et $N(A - S)$ en focntion de S.

2) (♣) (X) Soit $A \in GL_2(\mathbb{C})$ une matrice complexe inversible d'ordre 2. Montrer que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ indexée par $\mathbb{Z}$ est bornée ssi A est diagonalisable de valeurs propres de module 1.

3) (♣) (*Centrale*)

On pose $E = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = I_2\}$ et $F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \forall \lambda \in \text{Sp}(A),\ |\lambda| = 1\}$.

a) Montrer que $E \subset F$.

b) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} = \alpha$. En déduire que F est inclus dans l'adhérence de E.

c) Montrer que F est fermé. Conclure.

4) (♣) (*Centrale*) a) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(O_n(\mathbb{R}))$.

b) Montrer que $N(M) = \sup\{\text{tr}(UM),\ U \in O_n(\mathbb{R})\}$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5) (♣) (X) Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invariante par similitude, c'est-à-dire telle que pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $N(P^{-1}AP) = N(A)$.

6) (♣) (X) On note $F = \{M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \mid M^2 = I_2\}$. Les matrices I_2 et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont-ils isolés dans F ?

Terminologie : On dit qu'un point $A \in F$ est dit isolé dans F ssi il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(A, \varepsilon) \cap F = \{A\}$.

Fonctions vectorielles

7) (♣) (X) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ continue non identiquement nulle, où $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne.

Montrer que $\left\| \int_a^b f(t)\, dt \right\| = \int_a^b \|f(t)\|\, dt$ ssi il existe $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ et un vecteur v tels que $\forall t \in [a, b]$, $f(t) = \varphi(t)\, v$.