Oraux. Série n°25. Indications

1) a) Norme euclidienne canonique ; b) Cauchy-Schwarz ; d) $N(A^TB)^2 = \sum_{i,j} \langle A_i, B_j \rangle^2$.

e) On écrit $A = S + T$, avec S symétrique et T anti-symétrique. On a S et T orthogonales pour le psc.

2) Noter que si A et B sont semblables, $(A^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée ssi $(B^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée.

3) b) Utiliser le fait que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ ou à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ et $\mu = e^{2\pi i\beta}$, Considérer $M_n = \begin{pmatrix} \exp(2\pi i \lfloor n\alpha \rfloor /n) & 0 \\ 0 & \exp(2\pi i \lfloor n\beta \rfloor /n) \end{pmatrix}$.

Noter d'autre part que $\begin{pmatrix} e^{2\pi i\alpha} & 1 \\ 0 & e^{2\pi i\alpha} \end{pmatrix}$ est limite des matrices $\begin{pmatrix} e^{2\pi i\alpha} & 1 \\ 0 & e^{2\pi i(\alpha+1/n)} \end{pmatrix}$ qui sont diagonalisables.

C'est pourquoi il est conseillé de poser $G = \{A \in f \mid A \text{ diagonalisable } \}$.

On a alors $F \subset \overline{G}$ et $G \subset \overline{E}$, donc $F \subset \overline{E}$ (l'adhérence de l'adhérence est l'adhérence).

c) Utiliser la continuité du polynôme caractéristique et justifier la continuité de ses racines.

En conclure avec a) et b) que $F = E$.

4) a) Montrer que $E_{ij} \in \mathrm{Vect}(O_n(\mathbb{R}))$ en utilisant des matrices de symétries et de permutations.

b) Noter que $\mathrm{tr}(M^TM) = 0$ ssi M est nulle.

5) Pour $n = 2$: Noter que pour tout α non nul, $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6) Toute matrice $M \in F$ est une symétrie orthogonale, donc de trace 2, 0 ou -2.

En déduire que I_2 est isolé. En considérant les $M = U^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U$, montrer que A n'est pas isolé.

Fonctions vectorielles

7) $(\Rightarrow)$ Poser $v = \dfrac{\int_a^b f(t)\ dt}{\int_a^b \|f(t)\|}$, et $g(t) = \langle f(t), v \rangle$. On a $\int_a^b g(t)\ dt = \int_a^b \|f(t)\|\ dt$. En déduire $g(t) = \|f(t)\|$.