Oraux. Série n°24. Algèbre bilinéaire (endomorphismes symétriques)

Matrices de Gram

1) (♣) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M = (A^T A)$ est symétrique positive et que $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Ker} A$.

2) (♣) (X) Soient $a < b$ et $(f_1, f_2, ..., f_n)$ une famille de fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose $A = \left(\int_a^b f_i(t) f_j(t)\ dt\right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$. Montrer que $\det A = 0$ ssi $(f_1, ..., f_n)$ est liée.

Projecteurs orthogonaux

3) (♣) a) Montrer que tout projecteur orthogonal est symétrique.

b) Soit E un espace euclidien. Montrer qu'un projecteur p est un projecteur orthogonal ssi $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

4) (♣) (*Centrale*) Soient p et q deux projecteurs orthogonaux. Montrer que : $p \circ q = 0 \Rightarrow q \circ p = 0$.

Endomorphismes symétriques et matrices symétriques réelles

5) (♣) (*Centrale*) On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 PQ$.

a) On pose $f : E \to E \quad P \longmapsto X(1 - X)P'' - (2X - 1)P'$. Montrer que $\langle f(P), Q \rangle = -\int_0^1 x(1 - x)\ P'(x)Q'(x)\ dx$.

b) En déduire que f est diagonalisable, et que ses valeurs propres sont simples et négatives. Préciser $\operatorname{Ker} f$.

c) On considère $s : P(X) \longmapsto P(1 - X)$. L'endomorphisme $g = f \circ s$ est-il diagonalisable ?

6) (♣) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les racines de χ_A. Montrer que A est diagonale.

7) (♣) Soit $A = M + \lambda I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour $\lambda = i$, la matrice A est inversible.

8) (♣) (*ENS*) Soit A et $B \in S_2(\mathbb{R})$ de même spectre. Montrer qu'il existe $R = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ tel que $A = RBR^{-1}$.

9) (♣) (*ENS*) Montrer que $\phi : S_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2 \quad A \longmapsto (\lambda, \mu)$, avec $\lambda \leq \mu$ valeurs propres de A, est continue.

Indications : Expliciter λ et μ comme fonctions des coefficients de A.

Hansdorffien

10) (♣) Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ les valeurs propres de u.

a) Montrer que $\lambda_n = \sup_{x \neq 0} \dfrac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}$, et préciser les cas d'égalité. De même, on a $\lambda_1 = \inf_{x \neq 0} \dfrac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}$.

b) Soit F un sev de dimension p. Montrer que $\sup_{x \in F,\ x \neq 0} \dfrac{(u(x) \mid x)}{\|x\|^2} \geq \lambda_p$. Donner un exemple où il y a égalité.

11) (♣) a) (X) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\{\langle X, AX \rangle\ ,\ \|X\| = 1\}$ est un segment.

b) (*Mines*) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. on suppose que $\left|X^T A X\right| \leq X^T X$ pour tout X. Montrer que $|\det A| \leq 1$.

12) (♣) (*ENS*) Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...\lambda_n$ les valeurs propres de A.

a) *Théorème du min-max* (= th de Courant-Fischer). Pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, montrer que

$$\lambda_k = \min_{F \text{ sev de dim } k} \left(\max_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{\langle X, AX \rangle}{\|X\|^2} \right)$$

b) *Théorème d'entrelacement des racines.*

Soit $B \in \mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{R})$ la matrice obtenue en supprimant dans A la dernière ligne et la dernière colonne.

On note $\mu_1 \leq \mu_2 \leq ... \leq \mu_{n-1}$ les valeurs propres de B. Montrer que $\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n$.

13) (♣) (*Centrale*) a) Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$ symétrique telle que $\operatorname{tr} u = 0$.

a) Montrer qu'il existe $x \neq 0$ tel que $\langle x, u(x) \rangle = 0$.

b) Montrer qu'il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u a une diagonale nulle.

Remarque culturelle : En fait, la propriété est vraie pour tout endomorphisme sur tout corps K.

14) (♣) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente non nulle. Déterminer $\Delta(A) = \{\langle Ax, x \rangle,\ x \in \mathbb{R}^n\}$.

15) (♣) (*inspiré Centrale*) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont strictement positifs. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Tous les mineurs de A sont strictement positifs

(ii) Il existe $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = T^T T$

(iii) $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ est définie positive. On pourra noter u l'endomorphisme symétrique associé à A.

Racine carrée et polynôme de matrice symétrique réelle

16) (♣) a) Soit $\lambda \geq 0$.

Montrer que l'unique matrice symétrique positive $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = \lambda I_n$ est $M = \sqrt{\lambda} I_n$.

b) Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe unique matrice symétrique positive $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = A$. Montrer que B est un polynôme en A.

Co-orthogonalisation de matrices symétriques dont une est (définie) positive

17) (♣) (X) a) Soient $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ symétrique positive. Montrer qu'il existe $M \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.

b) Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On suppose de plus A inversible. Montrer que AB est diagonalisable.

Indication : Noter que AB est semblable à MBM.

18) (♣) a) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $P^T AP = I_n$.

b) Soit $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. Montrer que $\det(A + B) \geq \det A + \det B$.

Indication : Se ramener au cas où $A = I_n$.

c) Montrer que $\forall \in S_n^+(\mathbb{R})$, $\det(A + B) \geq \det A + \det B$. *Indication* : Considérer $A + \varepsilon I_n$, avec $\varepsilon > 0$.

Endomorphismes antisymétriques et matrices antisymétriques réelles

19) (♣) a) Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$; ii) $\langle u(x), x \rangle = 0$; iii) Si $\mathcal{B}$ BON, $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u$ antisymétrique.

b) Soit u antisymétrique et λ valeur propre de u. Montrer que $\lambda = 0$.

20) (♣) a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que le spectre de A est inclus dans $\{0\}$.

b) Montrer que $(A - I_n)$ est inversible et que $(A + I_n)(A - I_n)^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

21) (♣) (X) a) Caractériser les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\langle X, AX \rangle = 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.

b) Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la fois antisymétriques et nilpotentes.

Indications : a) A antisymétrique ; pour le sens direct, montrer d'abord que $\langle X, AY \rangle = -\langle Y, AX \rangle$.

b) A est orthosemblable à une matrice antisymétrique et triangulaire supérieure stricte.

Autre preuve : $F = (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$ est stable par l'endomorphisme antisymétrique u associé à A, et la restriction de u à F est à la fois inversible et nilpotent, donc $F = \{0\}$ ...

22) (♣) (X) On note D l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geq 2$.

a) L'ensemble D est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

b) Soit V un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\dim V \leq \frac{1}{2}n(n+1)$, et donner un cas d'égalité.

Adjoint

23) (♣) a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = (\operatorname{Im} A^T)$ et $(\operatorname{Im} A)^{\perp} = (\operatorname{Ker} A^T)$.

b) Montrer que F est stable par A ssi $F^{\perp}$ est stable par A^T.

En déduire une méthode pour déterminer les hyperplans stables par A.

Compléments

24) (♣) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable.

a) Montrer qu'il existe un produit scalaire pour lequel u est symétrique.

b) Montrer que la restriction de u à un sev stable est diagonalisable.

0) (♣) Soit G un ensemble fini non vide inclus dans $GL_2(\mathbb{R})$, stable par produit et par passage à l'inverse.

Soit $(\ \mid\ )$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$. On pose $\langle x, y\rangle = \sum_{A\in G}\ (x \mid Ay)$.

a) Montrer que

a) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

b) **3)** *Désormais,* on suppose que G est un sous-groupe fini de $SL_2(\mathbb{R})$.

Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe fini de $O_2(\mathbb{R})$.

En déduire que G est cyclique (c'est-à-dire G isomorphe à U_n, où $n = \operatorname{card} G$).

4) Démontrer que tout sous-groupe fini de $SL_2(\mathbb{Z})$ est de cardinal 1, 2, 3, 4 ou 6.

Expliciter deux groupes de $SL_2(\mathbb{Z})$ de cardinaux respectifs 4 et 6.