Oraux. Série n°24. Indications

Matrices de Gram

1) On utilise $\langle X, MX \rangle = \|AX\|^2$.

2) (♣) On considère une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $E = \text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_n)$ muni du p.s. $\langle f, g \rangle = \int_a^b fg$.

On a $A = M^T M$, où $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1, f_2, \dots, f_n)$. Donc $\det A = 0$ ssi $\det M = 0$.

Projecteurs

3) a) Tout projecteur orthogonal est diagonalisable dans une base orthonormée.

b) Le sens direct résulte du théorème de Pythagore : $\|p(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|x - p(x)\|^2$.

Réciproquement, supposons p projection sur F parallèlement à G telle que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Soient $y \in F$ et $z \in G$. On a $p(ty + z) = y$, donc $\forall t \in \mathbb{R}, \|ty\|^2 \leq \|ty + z\|^2$.

D'où on déduit $\forall t \in \mathbb{R}, 2t \langle y, z \rangle + \|z\|^2 \geq 0$, donc $\langle y, z \rangle = 0$. Donc p est orthogonale.

4) *Remarque* : p et q sont symétriques.

$p \circ q = 0 \Leftrightarrow \text{Im } q \subset \text{Ker } p \Leftrightarrow (\text{Im } q)^\perp \supset (\text{Ker } p)^\perp \Leftrightarrow \text{Ker } q \supset \text{Im } p \Leftrightarrow q \circ p = 0$.

Endomorphismes symétriques et matrices symétriques réelles

5) b) $f \in \mathcal{S}(E)$, et $\langle f(P), P \rangle \leq 0$, avec égalité ssi P constant. Déterminer les valeurs propres en considérant la matrice triangulaire supérieure qui représente f dans la base canonique. On trouve les $k(k+1)$, avec $0 \leq k \leq n$.

c) Noter que si $f(P) = \lambda P$, alors $f(s(P)) = \lambda s(P)$. En déduire que $s(P) = P$.

6) Utiliser $\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 = \text{tr}(A^T A) = \sum_{i,j} a_{ij}^2$.

7) (♣) Soit $A = M + \lambda I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour $\lambda = i$, la matrice A est inversible.

8) par hypothèse, il existe $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ telles que $\text{Mat}_{\mathcal{B}} a = \text{Diag}(\lambda, \mu) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'} b$.

Quitte à changer le signe de e'_2 , la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice de rotation.

9) Expliciter λ et μ comme fonctions des coefficients de A .

Hansdorffien

10) cf cours.

11) a) cf cours. b) Toutes les valeurs propres de A vérifient $|\lambda| \leq 1$.

12) a) Tout sev F de dim k rencontre $G = \text{Vect}(e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$, donc $\max_{X \in F \setminus \{0\}} \langle X, AX \rangle \geq \lambda_k \|X\|^2$.

b) On note $H = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$. Justifier $\lambda_k \leq \mu_k$. Si $\dim F = k+1$, alors $\dim(F \cap H) \geq k$, d'où $\mu_k \leq \lambda_{k+1}$.

13) a) On a $\langle x, u(x) \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^2$ et $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 0 \dots$

b) On raisonne par récurrence en considérant $H = x^\perp$, où x est le vecteur trouvé au a).

14) Noter qu'il existe une BON où l'endomorphisme u associé à A est triangulaire supérieure stricte.

Se ramener au cas d'une matrice d'ordre 2 triangulaire supérieure stricte. On a alors $\langle Ax, x \rangle = \lambda x_1 x_2$, avec $\alpha \neq 0$.

Remarque : $\Delta(A) = \Delta(S)$, où $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$. Donc la matrice S n'est ni positive ni négative (autrement dit, elle admet au moins une valeur propre > 0 et une valeur propre < 0).

15) (i) implique (ii) : Procéder par récurrence sur n .

(ii) implique (iii) : Utiliser $X^T(AX) = \|TX\|^2$

(iii) implique (i) : Le mineur d'ordre k est la restriction de u à $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, qui est symétrique défini positif.

Remarque : Preuve de (iii) $\Rightarrow$ (ii) : Considérons le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ associé à A défini par $\langle X, Y \rangle = X^T(AY)$.

Alors les colonnes de M forment une BON pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ssi $M^T(AM) = I_n$, c'est-à-dire $A = T^T T$, avec $T = M^{-1}$.

Le procédé de Gram-Schmidt appliqué à la base canonique donne une BON associée à une matrice triangulaire inversible M , donc $T = M^{-1}$ est aussi, ce qui permet de retrouver (i).

Remarque : Preuve de (i) $\Rightarrow$ (iii) : Posons $H = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$: si u défini positif sur H , alors u admet sur E au plus une valeur propre négative (en effet, tout sev propre où u est négative est nécessairement en somme directe avec H). On conclut alors aisément par récurrence.

Racine carrée et polynôme de matrice symétrique réelle

16) a) Soit $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = \lambda I_n$. Comme M est symétrique, elle est diagonalisable à valeurs propres positives ; et comme $M^2 = \lambda I_n$, alors elle ne peut avoir que $\sqrt{\lambda}$ comme seule valeur propre.

Une matrice diagonalisable admettant une seule valeur propre est une homothétie ! Réciproque immédiate.

b) Si $B^2 = A$, B commute avec A , donc ses sev propres de A sont stables par B .

En considérant les restrictions de B aux sev propres, on se ramène à la situation du a).

Pour rédiger, il vaut mieux considérer des endomorphismes et considérer une base $\mathcal{B}$ orthonormée de diagonalisation : on se ramène ainsi au cas où A est diagonale et B est diagonale par blocs et symétrique (car $\mathcal{B}$ orthonormée).

Co-orthogonalisation de matrices symétriques dont une est (définie) positive

17) b) Noter que AB est semblable à MBM .

18) b) Se ramener au cas où $A = I_n$.

c) Montrer que $\forall \varepsilon \in S_n^+(\mathbb{R})$, $\det(A + B) \geq \det A + \det B$. *Indication* : Considérer $A + \varepsilon I_n$, avec $\varepsilon > 0$.

Solution : a) Il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $U^T A U = D$ diagonale à coefficients positifs.

En écrivant $D = C^2 = C^T C$, où C diagonale à coefficients positifs, on en conclut que $P = UC^{-1}$ convient.

b) On utilise a), et on considère $M = P^T B P$. Alors $\det(I_n + M) = \det(A + B) \det(P)^2$, car $\det(P^T) = \det(P)$.

La matrice M est symétrique et définie positive : $(MX | X) = (BY | Y)$, avec $T = P X$.

Or, $I_n + M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et ses valeurs propres sont les $1 + \lambda_i$, avec λ_i valeur propre de M .

Donc $\det(I_n + M) = (1 + \lambda_1) \dots (1 + \lambda_n) \geq 1 + \lambda_1 \dots \lambda_n$: il suffit de développer !

Ainsi, $\det(I_n + M) \geq \det(I_n) + \det(M)$, donc en divisant par $(\det P)^2$, on obtient $\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)$.

c) Posons $A_\varepsilon = A + \varepsilon I_n$. Alors $A_\varepsilon \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ pour tout $\varepsilon > 0$. Par b), et on a $\forall \varepsilon > 0$, $\det(A_\varepsilon + B) \geq \det A_\varepsilon + \det B$.

On fait tendre ε vers 0^+ : on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon = A$ et par continuité de $\det$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \det A_\varepsilon = \det A$, d'où on conclut.

Endomorphismes antisymétriques et matrices antisymétriques réelles

19) a) i) implique ii) en prenant $x = y$.

ii) implique i) : on a $\langle u(x) + u(y), x + y \rangle = 0$, et en développant, on obtient $\langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$.

i) implique iii) : avec $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, le coefficient a_{ij} de $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}} u$ est $\langle u(e_j), e_i \rangle$ i -ième coordonnée de $u(e_j)$.

iii) implique i) : On a $\langle u(x), y \rangle = (AX)^T Y = X^T A^T Y = -X^T AY = -\langle x, u(y) \rangle$.

b) Il existe x non nul tel que $u(x) = \lambda x$. Alors $\langle u(x), x \rangle = \lambda \|x\|^2$, donc $\lambda = 0$.

20) a) Comme A est antisymétrique, on a $\langle AX | X \rangle = 0$.

Ainsi, si λ est une valeur propre de A , il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$, d'où $\lambda = 0$.

b) $(A - I_n)$ est inversible car, par a), 1 n'est pas valeur propre de A . Posons $U = (A + I_n)(A - I_n)^{-1}$.

On a $U^T U = ((A - I_n)^{-1})^T (A + I_n)^T (A + I_n)(A - I_n)^{-1}$. Comme l'inverse de la transposée est aussi la transposée de l'inverse et que $A^T = -A$, on en déduit $U^T U = (A + I_n)^{-1} (A - I_n) (A + I_n) (A - I_n)^{-1}$.

Pour conclure que $U^T U = I_n$, il suffit de prouver que $(A + I_n)^{-1}$ et $(A - I_n)$ commutent.

Or, $(A + I_n)$ et $(A - I_n)$ commutent. Et si $MN = NM$, alors on a aussi $N^{-1}M = MN^{-1}$ (pour N inversible).

21) a) A antisymétrique ; pour le sens direct, montrer d'abord que $\langle X, AY \rangle = -\langle Y, AX \rangle$.

b) A est orthosemblable à une matrice antisymétrique et triangulaire supérieure stricte.

Autre preuve : $F = (\text{Ker } A)^\perp$ est stable par l'endomorphisme antisymétrique u associé à A , et la restriction de u à F est à la fois inversible et nilpotent, donc $F = \{0\}$...

22) a) Trouver deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonalisables, dont la somme ne l'est pas.

b) Noter qu'une matrice antisymétrique est diagonalisable ssi elle est nulle. En déduire $V \cap A_n(\mathbb{R}) = \{O_n\}$.

Adjoint

23) a) Utiliser $\langle X, AY \rangle = \langle A^T X, Y \rangle$ pour prouver que $(\text{Im } A)^\perp \subset (\text{Ker } A^T)$.

b) Supposons F stable par F . Alors $\forall Y \in F, \forall X \in F^\perp, \langle X, AY \rangle = 0$.

Compléments

24) a) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u .

On considère le p.s. faisant de $\mathcal{B}$ une base orthonormée : $\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Ainsi, u est diagonalisable dans une base orthonormée, donc est symétrique.

b) La restriction de u à F est aussi symétrique (car $\langle x, u(y) \rangle = \langle u(x), y \rangle$ pour tous $(x, y) \in F^2$).