

Oraux. Série n°23. Algèbre bilinéaire (produit scalaire, transformations orthogonales)

Produit scalaire, familles orthonormées

1) (♣) (*Mines*) Soient (a, b) famille libre dans E euclidien. Pour $x \in E \setminus \{0\}$, on pose $f(x) = \frac{\langle a, x \rangle \langle b, x \rangle}{\|x\|^2}$.

Déterminer les extrema de f sur $E \setminus \{0\}$.

2) (♣) (*extrait Centrale*) a) Montrer que $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3) (♣) (*Centrale*) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_p$ des réels distincts.

a) Donner une CNS sur p pour que $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^p P(a_k)Q(a_k)$ soit un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$.

b) On suppose désormais $p = n$. Expliciter une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer la distance de $Q \in E$ au sous-espace vectoriel $H = \{P \in E \mid \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0\}$.

4) (♣) (*ENS*) *Famille obtusangles*. Soient $(x_1, \dots, x_{p+1})$ une famille de E euclidien telle que $\forall i \neq j, \langle x_i, x_j \rangle < 0$.

Montrer que $(x_1, \dots, x_p)$ est libre. *Remarque* : De ce fait, $p + 1 \leq 1 + \dim E$.

Matrices orthogonales et transformations orthogonales

5) (♣) a) (*Mines*) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\sum_{i,j} a_{ij}^2 = n$ et que $\left| \sum_{i,j} a_{ij} \right| \leq n$.

b) Donner un exemple où $\left| \sum_{i,j} a_{ij} \right| = n$. Pour $n = 2$ et $n = 4$, donner un exemple où $\sum_{i,j} |a_{ij}| = n\sqrt{n}$.

6) (♣) a) Soient e_1 et e_2 deux vecteurs distincts de même norme d'un espace euclidien E .

Montrer qu'il existe une unique réflexion (= symétrie orthogonale hyperplane) s tel que $s(e_1) = e_2$.

b) Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

Reconnaître géométriquement l'endomorphisme r tel que $r(e_j) = e_{n+1-j}$ pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

7) (♣) Déterminer les matrices $A \in O_n(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

8) (♣) Pour A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère $\varphi(A, B) = \text{tr}(A^T B)$.

a) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.

b) Soit U et V des matrices orthogonales. Montrer que $\|UAV\| = \|A\|$.

c) En déduire que si A est symétrique, $\|A\|^2$ est la somme des carrés des valeurs propres de A .

Remarque : Une autre preuve consiste à noter que $\|A\|^2 = \text{tr}(^t A A) = \text{tr}(A^2)$.

9) (♣) Soit $M \in O_3^+(\mathbb{R})$. Montrer que M est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

10) (★) (*Mines*) Soit E euclidien. Caractériser les $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f(V^\perp) = f(V)^\perp$ pour tout sev V de E .

Ind : Montrer qu'on a alors $\langle x, y \rangle = 0$ implique $\langle f(x), f(y) \rangle = 0$.

En considérant $\langle x + y, x - y \rangle = 0$ pour x et y de norme 1, montrer que $f = \lambda u$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $u \in O(E)$.

Distance à un sev

11) (♣) Expliquer comment on calcule $m = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} |t^2 - a - bt|^2 e^{-t} dt$.

Procédé de Gram-Schmidt

12) (♣) Montrer que tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit $A = UT$, où $U \in O_n(\mathbb{R})$ et T triangulaire supérieure.

Remarque culturelle : On obtient en particulier $A^T A = T^T T$ (matrices de Gram).

Dual d'une partie

13) (★) (*ENS Ulm-Lyon*) Soit A une partie de $E = \mathbb{R}^n$.

On considère $A^* = \{x \in E \mid \forall y \in A, \langle x, y \rangle \leq 1\}$. Déterminer les A tels que $A = A^*$.

Minimisation de distance

14) (♣) On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de la norme euclidienne canonique : $\|A\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Calculer $\inf\{\|A - X^T X\|^2, X \in \mathbb{R}^n\}$.