Oraux. Série n°22. Indications

Coréduction

1) Les sev propres de A^2 sont stables par A. On se ramène ainsi au cas $A^2 = \lambda I$, avec ici $\lambda \neq 0$.

Remarque : La propriété est fausse notamment pour les matrices non nulles nilpotentes d'ordre 2.

2) a) On a $ab = (b + \mathrm{Id})a$. Montrer que a ne peut être inversible. Et $\operatorname{Ker} a$ stable par b.

b) Procéder par récurrence sur n.

3) a) Considérer les restrictions de v aux sous-espaces propres E_λ de u (les E_λ sont stables par v).

b) On considère une base de diagonalisation des s_j.

Les matrices sont diagonales à valeurs dans $\{-1, 1\}$, donc leur nombre $\leq 2^n$.

4) b) On a $q_0^2 = q_0$, donc q_0 est aussi une projection, donc est diagonalisable.

On choisit une base de diagonalisation de q_0 et une base de diagonalisation de q_1, restriction de q à $\operatorname{Im} p$.

Comme $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont supplémentaires, on obtient une base de codiagonalisation de p et q.

c) On fait ainsi apparaître 4 blocs de valeurs propres 0 ou 1, selon p et q. Ainsi, les valeurs propres de $p + q$ appartiennent à $\{0, 1, 2\}$ de sev propres $(\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q)$, $(\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q) \oplus (\operatorname{Ker} q \cap \operatorname{Im} p)$ et $(\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)$. On en déduit que $\operatorname{tr}(p + q) = \operatorname{rg}(p + q) + \dim F$.

5) b) On a $MZ_j = \lambda_j Z_j$, donc $\left\{ \begin{array}{r} AX_j = \lambda_j X_j \\ BX_j + CY_j = \lambda_j Y_j \end{array} \right.$, donc les X_j sont des vecteurs propres de A.

c) Montrer d'abord que M^T est diagonalisable ssi M est diagonalisable.

Endomorphismes nilpotents

6) i) $\Rightarrow$ ii) : on trigonalise, et les coefficients diagonaux sont nuls.

ii) $\Rightarrow$ iii) : Par calcul matriciel : Pour $k \leq n$, Les $(k-1)$-ième surdiagonales de A^k sont nulles.

iii) $\Rightarrow$ i) : Immédiat.

i) $\Rightarrow$ iv) : Les valeurs propres sont des racines de tout polynôme annulateur.

iv) $\Rightarrow$ ii) : On trigonalise A, et la diagonale est nulle (car les valeurs propres le sont).

7) On a $\det(A + tB) = \det(A)\det(I_n + tN)$, où $N = A^{-1}B$. Donc f est constante ssi $t \longmapsto \det(I_n + tN)$ est constante, donc ssi le polynôme caractéristique de N vaut x^n, c'est-à-dire N nilpotente.$\det(I_n + tN)$.

8) a) Si X vecteur propre de B de valeur propre λ, AX non nul vecteur propre de B de valeur propre $(\lambda + 1)$.

b) Utiliser la trace.

9) a) On note a et n les endomorphismes associés. Supposons $a \circ n = O$. On a donc $\operatorname{Im} n \subset \operatorname{Ker} a$.

En se plaçant dans une base adaptée à $(\operatorname{Ker} a) \oplus S = \mathbb{C}^n$, les matrices de a et n sont de la forme

$A' = \left(\begin{array}{c|c} O & * \\ \hline O & * \end{array} \right)$ et $N' = \left(\begin{array}{c|c} M & * \\ \hline O & O \end{array} \right)$, et M est nilpotente (car N' l'est).

On en déduit que le polynôme caractéristique de $A' + N'$ est égale à celui de A', donc de même pour $a + n$ et a.

b) Supposons $NA = O$. On a alors $A^T N^T = O$. Or, N^T est nilpotente (car N l'est).

On déduit de a) que $A^T + N^T$ et A^T ont même polynôme caractéristique. Donc de même pour $A + N$ et A.

10) Si $\operatorname{rg} A = 1$, on a $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker} A$, et choisir une base adaptée à $\operatorname{Im} A \oplus S \oplus T$, où $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} A \oplus S$.

Si $\operatorname{rg} A = 2$, on a A^2 non nulle, et considérer une base (A^2x, Ax, x) où $x \notin \operatorname{Ker} A^2$.

11) a) $\operatorname{Sp}(A)$ est fini et globalement invariant par $z \longmapsto 2z$, donc $\operatorname{Sp}(A) = \{0\}$, donc A nilpotente.

La réciproque, facile à prouver pour $n = 2$ ou si on connaît la réduction de Jordan ...

b) $\operatorname{Sp}(A)$ est fini, non réduit à $\{0\}$ et globalement invariant par $z \longmapsto \lambda z$, donc il existe $p \leq \operatorname{card} \operatorname{Sp}(A)$ tel que $\lambda^p = 1$.

Donc K est inclus dans la réunion des U_k, avec $k \leq \operatorname{card} \operatorname{Sp}(A)$.

Matrices compagnons

12) a) Par récurrence ou bien en développant selon la dernière colonne.

b) Utiliser $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) \geq n - 1$ compte teni des $(n-1)$ pivots "1".

c) A est diagonalisable ssi P est scindé à racines simples.

13) Raisonner en termes d'endomorphisme u. Ainsi, $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ est une base $\mathcal{B}$ de $E = \mathbb{C}^n$.

Et M est la matrice dans la base canonique de $v : z \longmapsto u(z) + \varphi(z)x$, où $\varphi(z) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$.

Donc la matrice de v dans $\mathcal{B}$ est la transposée d'une matrice compagnon, avec $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sur la première ligne.

Conclure en utilisant le déterminant d'une matrice compagnon (cf oraux sur les déterminants).

Polynômes de matrices et d'endomorphismes

14) a) Utiliser le fait que $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ z \longmapsto P(z)$ est surjective.

b) Utiliser le fait que $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \longmapsto P(x)$ n'est pas surjective. Soit un réel $\alpha \notin P(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il n'existe pas M telle que $P(M) = \operatorname{Diag}(\alpha, 0, ..., 0)$. On aurait en effet, $\mathbb{R}e_1$ stable par m.

15) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^p = \operatorname{Id}$. Qu'en déduire sur les valeurs propres de g ?

Supposons $\operatorname{tr} g = d$. Montrer que $g = \operatorname{Id} + n$, avec $\omega \in U_p$ et n nilpotent. Montrer que $n = 0$.

16) On vérifie par une étude de fonction que le polynôme $P(x) = x^3 - x - 1$ admet une unique racine réelle α, t que α est strictement positif. On note β et $\overline{\beta}$ les autres racines de P dans $\mathbb{C}$.

En considérant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A est trigonalisable de valeurs propres $\in \{\alpha, \beta, \overline{\beta}\}$. Comme χ_A est réel, ses racines sont deux à deux conjuguées avec multiplicité, donc $\det A$ est de la forme $\alpha^p \beta^q \overline{\beta}^q = \alpha^p |\beta|^{2q}$, qui est strictement positif.

17) Considerer le développement de $\sqrt{1+x} = P_n(x) + O(x^{n+1})$. On a $P_n(x)^2 = 1 + x + O(x^{n+1})$.

18) On a $P(u) : M \longmapsto P(A)M$. Donc $P(A) = O_n$ ssi $P(u) = 0$.

Donc A et u admettent les mêmes polynômes annulateurs, d'où le résultat.

19) a) Posons $\chi_A(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - \lambda_k)$, donc $\chi_A(B) = \prod_{k=1}^{n}(B - \lambda_k I_n)$.

Un produit de matrices carrées est inversible ssi chaque facteur est inversible (cf déterminant).

Donc $\chi_A(B)$ est inversible ssi $(B - \lambda_k I_n)$ est inversible pour tout k, donc ssi $\lambda_k \notin \operatorname{Sp}(B)$ pour tout k.

b) Supposons (i). Ainsi, il existe λ valeur propre commune à A et B, donc aussi à B^T.

On considère X et Y vecteurs propres de A et de B^T associés à une même valeur propre λ.

La matrice $M = XY^T$ est de rang 1 car X et Y vecteurs non nuls.

Et on a bien $AM = \lambda XY^T = MB$, car $Y^T B = \lambda Y^T B$.