Oraux. Série n°21. Indications

Caractérisation des homothéties

1) Si u n'est pas une homothétie, il existe x tel que $y = u(x) \notin Kx$.

Considérer un hyperplan H contenant x et ne contenant pas y.

Culturel : On peut utiliser l'adjoint v : H est stable par u ssi tout vecteur non nul de E est vecteur propre.

2) a) Matriciellement : $AE_{ij} = E_{ij}A$ implique $a_{ii} = a_{jj}$ et $\forall k \neq i$, $a_{ki} = 0$.

b) $\mathrm{Vect}(GL(E)) = \mathcal{L}(E)$, donc par linéarité, on est ramené au a).

c) u commute avec une projection sur $D = Kx$ implique x vecteur propre de u.

3) $\lambda\,\mathrm{Id}$ n'est semblable qu'à elle-même.

Sev stables

4) a) Supposons $\mathrm{Im}(u - \lambda\,\mathrm{Id}) \subset H$. Alors $\forall x \in H$, $u(x) = \lambda x + y \in H$, avec $y \in H$, donc $u(x) \in H$.

Réciproquement, supposons H stable par u. Dans une base adaptée à $H \oplus \mathbb{R}a = E$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline O & \lambda \end{array}\right)$.

On note ici λ le dernier coefficient de la dernière colonne. Alors on a bien $\mathrm{Im}(u - \lambda\,\mathrm{Id}) \subset H$.

b) On a $\langle AX, Y\rangle = \left\langle X, A^T Y\right\rangle$. L'hyperplan $H = Z^{\perp}$ est stable par u ssi $\forall X \in H$, $\langle AX, Z\rangle = 0$, donc ssi $\forall X \in H$, $\left\langle X, A^T Z\right\rangle = 0$, c'est-à-dire $A^T Z \in \mathbb{R}Z$, ce qui équivaut à Z vecteur propre de A^T.

Polynômes caractéristique

5) $\mathrm{rg}(M - I_n) \leq 1$, d'où $\chi_{M-I_n} = x^n - (\mathrm{tr}\, M)x^{n-1}$.

Vecteurs et valeurs propres

6) a) On a $AZ = \lambda Z$, donc AX et $AY \in \mathrm{Vect}(X, Y)$. Si (X, Y) liée, alors λ serait réel.

b) Toute matrice réelle peut être considérée complexe.

Matrices semblables

7) $BA = B(AB)B^{-1}$. *Contre-exemple* : $A = E_{ij}$ et $B = E_{jj}$. On a $AB = E_{jj} \neq O_n$ et $BA = O_n$.

8) Il suffit de prouver que A est semblable à $\left(\begin{array}{c|c} O & I_r \\ \hline O & O \end{array}\right)$, avec $r = \frac{1}{2}n$. *Remarque* : n est pair.

En fait, on pourrait se limiter à $\left(\begin{array}{c|c} O & M \\ \hline O & O \end{array}\right)$, avec $M \in GL_r(K)$, et montrer que ces matrices sont semblables.

Trigonalisation

9) a) λ et μ sont les valeurs propres de u.

Par trigonalisation, il existe donc une base où la matrice de u est $A = \begin{pmatrix} \mu & 0 & * \\ 0 & \lambda & * \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

On a $(A - \lambda I_3)^2 = \begin{pmatrix} (\mu-\lambda)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$., d'où $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)^2 = \mathrm{Vect}(E_2, E_3)$ et $\mathrm{Ker}(A - \mu I_3) = \mathbb{C}E_1$.

b) On a $\mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id})^2$ et $\dim \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id})^2 = 2$. Et $\dim \mathrm{Ker}(u - \mu\,\mathrm{Id}) = 1$.

Donc : u diagonalisable ssi $\dim \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id}) = 2$, donc ssi $\mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id})^2$.

c) Immédiat si u est diagonalisable. supposons que ce n'est pas le cas.

On considère $y \in \operatorname{Ker}(u-\lambda \operatorname{Id})^2$ tel que $y \notin \operatorname{Ker}(u-\lambda \operatorname{Id})$.

On a alors $x = u(y) - \lambda y$ non nul et $x \in \operatorname{Ker}(u-\lambda \operatorname{Id})$.

On complète (x, y) base de $\operatorname{Ker}(u-\lambda \operatorname{Id})^2$ par un vecteur $z \in \operatorname{Ker}(u-\mu \operatorname{Id})$. La base $\mathcal{B} = (x, y, z)$ convient.

10) Considérer $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u$ et se placer dans $\mathbb{C}$ (les racines de χ_A sont non réelles et 2 à 2 conjufuées. *Autre solution* : Si n impair, χ_A admet au moins une racine réelle.

11) Soit $g \in G$ tel que $\operatorname{tr} g = n$. Montrer que les valeurs propres de g sont de module 1.

Si on a $\operatorname{tr} g = n$, elle sont égales à 1, et montrer que g ne peut être de la forme $\operatorname{Id} + n$, avec n nilpotent non nul.

Diagonalisation (cas génériques)

12) b) Utiliser $\operatorname{rg}(u^2) = \operatorname{rg}(u) - \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u)$.

13) a) On a $M - \lambda I_n = \left(\begin{array}{c|c} A-\lambda I_p & C \\ \hline O & B-\lambda I_q \end{array}\right)$. La matrice $B - \lambda I_q$ est inversible, donc de rang q.

On a $\dim(\operatorname{Ker}(M-\lambda I_n)) = p$. Donc nécessairement, $A - \lambda I_p = O_p$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice triangulaire supérieure. On suppose que A est diagonalisable.

Montrer qu'il existe $P \in GL_n(K)$ triangulaire supérieure telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Remarque : Soit T triangulaire supérieure. Alors T est diagonalisable ssi $\forall i < j$, $\lambda_i = \lambda_j \Rightarrow t_{ij} = 0$.

14) a) On peut considérer $N = M - I_{2n} = \left(\begin{array}{c|c} O_n & A \\ \hline O & C \end{array}\right)$, avec $C = B - I_n$.

Si M est diagonalisable, N aussi, χ_N est scindé, donc χ_C est scindé. On considère les $\dim E_\lambda$.

La propriété résulte de $\operatorname{rg}(N - \lambda I_{2n}) = \operatorname{rg}(C - \lambda I_n)$ et $\operatorname{rg}(N) \geq \operatorname{rg}(C)$.

b) La CNS est $\operatorname{rg}(N) = \operatorname{rg}(C)$, ce qui équivaut à $\operatorname{Ker} C \subset \operatorname{Ker} A$, car $\dim \operatorname{Ker} N = n + \dim(\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} C)$.

15) $(\Rightarrow)$ Supposons u diagonalisable. Soit F sev de E.

Compléter une base de F par des vecteurs propres de u en une base de E.

$(\Leftarrow)$ Considérer un hyperplan. En déduire l'existence d'une droite stable Ke_1.

Considérer ensuite un hyperplan contenant e_1. En déduire un vecteur propre e_2 indépendant de e_1.

Considérer ensuite un hyperplan contenant $\operatorname{Vect}(e_1, .e_2)$, etc.

Diagonalisation (cas particuliers)

16) a) $\operatorname{rg}(M - \lambda I_n) \geq n - 1$ (cf nombre de pivots).

b) Par a), les sev propres sont touts des droites vectorielles.

17) a) $Q(x) = \int_1^x P(t)\, dt$ est un polynôme de degré $\leq n+1$, s'annulant en 1, donc $T(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

b) On peut trouver les valeurs propres en considérant les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire représentant T dans la base canonique. *Autre méthode* : En résolvant $T(P) = \lambda P$, on trouve $P(x) = K\,|x-1|^\lambda$ sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$, et $\lambda \in \mathbb{N}$ nécessairement ...

18) a) φ_A forme liénaire non nulle, donc $\operatorname{Ker} \varphi_A$ hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$.

b) Il revient au même de considérer $f : M \longmapsto \operatorname{tr}(AM)B$, car on a alors $\theta = \operatorname{Id} + f$.

On a $f(M) = O_n$ ssi $M \in \operatorname{Ker} \varphi_A$. Supposons $f(M) = \lambda M$, avec λ non nul et $M \neq O_n$.

On a alors M colinéaire à B. Ainsi, on a nécessairement $\lambda = \operatorname{tr}(AM)$.

Conclure en distinguant deux cas, selon que $\operatorname{tr}(AB) = 0$ et $\operatorname{tr}(AB) \neq 0$ (dans ce cas, f diagonalisable).

Remarque : f est de rang 1, donc est diagonalisable ssi $\operatorname{tr} f \neq 0$.

19) Considérer $\operatorname{rg}(A - iI_n + I_n)$, et en déduire que $\dim E_{i-1} \geq n-1$. De même, $\dim E_{-i-1} \geq n-1$.

Déterminer les deux dernières valeurs propres en considérant $\operatorname{tr} A$ et $\operatorname{tr}(A^2)$.

20) On a $\operatorname{rg} M \leq 2$. Dans la suite, on suppose les a_i non tous nuls et les b_i non tous nuls.

Première méthode : Calcul du polynôme $\chi_M(x) = x^{n-2}(x^2 - \Delta)$, où $\Delta = \sum_{i=1}^n a_i b_i$.

Deuxième méthode : On résout $AX = \lambda X$, avec $\lambda \neq 0$ et $X \neq 0$.

Troisième méthode : On a $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(Z, E_n)$, où $Z = (a_1, a_2, ..., a_{n-1}, 0)$.

f est diagonalisable ssi $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = E$ et que la restriction de f à $\operatorname{Im} f$ est diagonalisable.

On se ramène donc à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$, diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ssi $\Delta > 0$.

21) Considérer la matrice de u dans la base canonique, et $u \circ u$.

Noter que $X^n P(\frac{1}{X})$ est le polynôme dont les coefficients sont ceux de P dans l'ordre inverse.

22) On a $f(A) = AM$, avec $M = J - I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, où J est la matrice ne contenant que des 1.

On se ramène par changement de base au cas de $g(A) = AD$, où $D = \operatorname{Diag}(n-1, 0, 0, ..., 0)$.

Matrices de rang 1

23) a) Les colonnes sonr colinéaires (droite KX), donc de la forme $(y_1 X, ..., y_n X))$, avec X, Y non nuls.

b) $A^2 = X(Y^T X)Y^T = \lambda XY^T = \lambda A$, avec $\lambda = (Y^T X) = (X \mid Y)$ produit scalaire canonique.

c) cf cours

d) Si $\lambda \neq 0$, A est diagonalisable donc semblable à $\operatorname{Diag}(\lambda, 0, 0, ..., 0) = \lambda E_{11}$.

si $\lambda = 0$, A est nilpotente de rang 1 : on a $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker} A$. On choisit une base $(e_1, ..., e_n)$, avec $\operatorname{Im} A = Ke_1$ et $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}(e_1, e_3, ..., e_n)$, et on choisit e_1 de sorte que le coefficient d'indice $(1, 2)$ vaut 1.

Diagonalisation par blocs

24) a) Sinon, le polynôme caractéristique serait de degré impair donc aurait au moins une racine réelle.

Autre méthode : Raisonner matriciellement et se placer dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Avec x non nul, $(x, u(x))$ est liée ssi x vecteur propre.

Le plan $\operatorname{Vect}(x, u(x))$ est stable par u, car $u(u(x)) = -x$.

c) Soit $y \in F \cap \operatorname{Vect}(x, u(x))$. On a donc $y = \alpha x + \beta u(x)$. Alors $u(y) = \alpha u(x) - \beta x \in F$.

On en déduit que $(\alpha^2 + \beta^2)x = \alpha y + \beta u(y) \in F$, donc $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, c'est-à-dire $y = 0$.

d) On construit par récurrence une famille libre $(x_1, u(x_1), x_2, u(x_2), ..., x_p, u(x_p))$, tant que $2p \leq n$.

en effet, posons $F = \operatorname{Vect}(x_1, u(x_1), x_2, u(x_2), ..., x_p, u(x_p))$. Si $F \neq E$, il existe $x_{p+1} \notin F$.

Par c), on a $F \oplus \operatorname{Vect}(x_{p+1}, u(x_{p+1}))$.

Le procédé s'arrête nécessairement. Donc il existe p tel que $F = E$.

$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u$ est la matrice diagonale par blocs, où chacun des p blocs est la matrice compagnon $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Classes de similitude

25) A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Et $B^k = \begin{pmatrix} 1 & \alpha k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est semblable à B.

26) Les matrices de $\mathcal{N}$ sont la matrice nulle et les matrices semblables à J. Donc $\mathcal{N} = \mathcal{M} \cup \{O_2\}$.

On a naturellement $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}$.

Réciproquement, soit $A \in \mathcal{H}$. On a $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$.

Il s'agit de décomposer A comme combinaisons linéaires de matrices nilpotentes.

Il suffit de considérer les matrices nilpotentes $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

27) a) On prend une base adaptée à $\operatorname{Ker} u \oplus S$, où S est un sypplémentaire de $\operatorname{Ker} u$.

b) cf cours.

c) Supposons $\operatorname{tr} u = 0$. On a $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$. On choisit $e_n \notin \operatorname{Ker} u$, puis $e_{n-1} = u(e_n)$, puis on complète en une base $(e_1, ..., e_{n-1})$ de $\operatorname{Ker} u$.

d) cf c) en distinguant deux cas selon que la trace est nulle ou non nulle.

e) $f = \operatorname{Id} + u$, où $u : X \longmapsto \operatorname{tr}(X)A$ est de rang 1 (on suppose A non nulle).

On a $u(E_{ii}) = A$ et $u(E_{ij}) = O_n$ si $i \neq j$. On a $\operatorname{tr} u = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \operatorname{tr} A$.

28) Sens réciproque immédiat. Supposons que M n'est pas une homothétie.

Il existe P tel que $P^{-1}MP$ triangulaire $= \begin{pmatrix} \lambda & \alpha & * \\ 0 & \mu & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$, avec $\lambda \neq \mu$.

On peut trouver P tel que la valeur de α soit arbitraire, car les $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

29) En fait, il s'agit de prouver que si M n'est pas une homothétie, il existe une matrice semblable à M admettant un coefficient diagonal nul. Il suffit de choisir $x \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $Sx \notin \mathbb{R}x$, et de se palcer dans une base de la forme $(x, u(x), ...)$.

30) Le polynôme caractéristique est de la forme $X^2 + c$. Réciproque en distinguant les cas $c = 0$ et $c \neq 0$.

En conclusion, il s'agit des matrices semblables à $\operatorname{Diag}(\lambda, -\lambda)$, avec $\lambda \neq 0$, et des matrices nilpotentes.

b) (X) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Montrer que A et $(-A)$ sont semblables ssi $\operatorname{tr} A = 0$ et $\det A = 0$.

Indication : Pour le sens direct, utiliser $\chi_{(-A)}(x) = -\chi_A(-x)$; Pour la réciproque : $\chi_A(x) = x(x^2 - c)$.

Pour le cas $c \neq 0$, on se ramène à des matrices diagonales ;

Pour le cas $c = 0$: utiliser la réduction de Jordan qui peut se prouver en distinguant des cas selon $\operatorname{rg} A$ et $\operatorname{rg} A^2$.

Sev stables et commutant d'un endomorphisme

31) b) Noter que si $B = P^{-1}AP$, alors $C(B) = P^{-1}C(B)P$, donc $\dim C(B) = \dim C(A)$ dans $\mathcal{M}_n(K)$.

Endomorphismes cycliques

32) On vérifie aisément que (i) implique (ii) sans l'hypothèse de la diagonalisabilité.

Réciproquement, supposons (ii). On se place dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ de diagonalisation de u.

On a $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u = \operatorname{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = A$. La famille $(I_n, A, ..., A^{n-1})$ est libre, donc les λ_j sont distincts.

On considère $x = e_1 + e_2 + ... + e_n$. Par Van der Monde, la famille $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ est une base de E.

33) (i) implique (ii) : Montrer que $\operatorname{rg} u^k \geq n-k$.

(ii) implique (iii) : Considérer $x \notin \operatorname{Ker} u^{n-1}$.

(iii) implique (iv) : Soit v commutant avec u. On a $v(u^k(x)) = u^k(v(x))$.

En déduire que si $v(x) = \sum_{j=0}^{n-1} u^j(x)$, alors $v = \sum_{j=0}^{n-1} u^j$ (ils coïncident sur une base).

(iv) implique (i) Considérer les endomorphismes v tels que $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} v = E$: ils commutent avec u, car $u \circ v = 0 = v \circ u$.