Oraux. Série n°21. Réduction des endomorphismes

Caractérisation des homothéties

1) (♣) a) Déterminer les $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

b) (X) Soit E un ev de dimension finie. Déterminer les $u \in \mathcal{L}(E)$ laissant stable tout hyperplan de E.

Indication : Toute droite est intersection d'hyperplans.

2) (♣) (*Centrale, Mines*) a) Déterminer les endomorphismes qui commutent avec tout endomorphisme de E.

b) Déterminer les endomorphismes qui commutent avec tout automorphisme de E.

c) Déterminer les endomorphismes qui commutent avec tout projecteur de E.

3) (♣) Caractériser les endomorphismes diagonalisables admettant une seule valeur propre.

Sev stables

4) (♣) a) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.

Soit H hyperplan de E. Montrer que H est stable ssi il existe $\lambda \in K$ tel que $\mathrm{Im}(u - \lambda \,\mathrm{Id}) \subset H$.

b) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ euclidien associé canoniquement à $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $Z \in \mathbb{R}^n$ non nul. Montrer qu'un hyperplan $H = Z^\perp$ est stable par u ssi Z est un vecteur propre de A^T.

Polynômes caractéristique

5) (♣) (X) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $M = (a_i b_j + \delta_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$.

Vecteurs et valeurs propres

6) (♣) a) Soit $Z = X + iY$ un vecteur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée à une valeur propre non réelle.

Montrer que $\mathrm{Vect}(X, Y)$ est un plan stable par A.

b) Montrer que tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ admet au moins une droite ou un plan stable par u.

Matrices semblables

7) (♣) (X) Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(K)$.

Montrer que si $B \in GL_n(K)$, les matrices AB et BA sont semblables. Donner un contre-exemple sinon.

8) (♣) (X) Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Ker}\, A$ et $\mathrm{Im}\, B = \mathrm{Ker}\, B$.

Montrer que A et B sont semblables.

Trigonalisation

9) (♣) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E ev de dimension 3. On suppose $\chi_u(x) = (x - \lambda)^2 (x - \mu)$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id})^2 \oplus \mathrm{Ker}(u - \mu \,\mathrm{Id}) = E$.

b) Montrer que u est diagonalisable ssi $\mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id})^2 = \mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id})$.

c) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, avec $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

10) ($\clubsuit$) (*Mines*) Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\mathrm{Id}$.

Montrer que n est pair et calculer $\mathrm{tr}\, f$.

11) ($\clubsuit$) (*X-ESPCI*) Soit $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ fini, stable par produit et par passage à l'inverse.

Montrer que pour tout $g \in G$ distinct de Id, on a $\mathrm{tr}\, g \neq n$.

Diagonalisation (cas génériques)

12) ($\clubsuit$) a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable ssi $\mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u = E$ et $u_{|\mathrm{Im}\, u}$ diagonalisable.

b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u = E$ ssi $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}(u^2)$.

13) ($\clubsuit$) a) Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O & B \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec A et B carrées, $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$ et $\lambda \notin \mathrm{Sp}(B)$.

On suppose M diagonalisable. Montrer que $A = \lambda I_n$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice triangulaire supérieure. On suppose que A est diagonalisable.

Montrer qu'il existe $P \in GL_n(K)$ triangulaire supérieure telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Remarque : Soit T triangulaire supérieure. Alors T est diagonalisable ssi $\forall i < j,\ \lambda_i = \lambda_j \Rightarrow t_{ij} = 0$.

14) ($\clubsuit$) (*X*) On considère $M = \left(\begin{array}{c|c} I_n & A \\ \hline O & B \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ diagonalisable. Montrer que B est diagonalisable.

b) Réciproquement, donner une CNS sur (A, B) pour que M soit diagonalisable.

15) ($\clubsuit$) (*Centrale*) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que u est diagonalisable ssi tout sev F de E admet un supplémentaire stable par u.

Diagonalisation (cas particuliers)

16) ($\clubsuit$) (*Centrale*) a) Soit M une matrice compagnon. Que dire de $\mathrm{rg}(M - \lambda I_n)$?

b) Montrer que M est diagonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

17) ($\clubsuit$) (*X*) Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on considère $T(P)$ l'unique polynôme tel que $\forall x > 0$, $T(P)(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t)\, dt$.

a) Montrer que T définit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer les valeurs et vecteurs propres de T.

18) ($\clubsuit$) (*Centrale*) Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulles. On note $\varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad M \longmapsto \mathrm{tr}(AM)$.

a) Cette application est-elle linéaire ? Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}\, \varphi_A$.

b) On considère $\theta : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad M \longmapsto M + \mathrm{tr}(AM)B$.

Cette application admet-elle des valeurs propres ? Donner une CNS pour que θ soit diagonalisable.

19) ($\clubsuit$) (*Centrale*) On considère $M = \begin{pmatrix} i & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & 1 & \vdots \\ 1 & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & -i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$, où les i et $-i$ alternent sur la diagonale.

Montrer que M est diagonalisable.

20) ($\clubsuit$) On considère $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1} \\ b_1 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme associé à M.

Donner une CNS pour que M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

21) ($\clubsuit$) (*Mines*) On considère $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \quad P \longmapsto X^n P(\frac{1}{X})$.

Montrer que u est diaognalisable et donner les sev propres.

22) ($\clubsuit$) (*Mines*) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad A = (A_1, ..., A_n) \longmapsto (A'_1, ..., A'_n)$, où $A'_j = \sum_{j \neq i} A_i$.

Montrer que f est un endomorphisme diagonalisable. Préciser sa trace et un polynôme annulateur.

Matrices de rang 1

23) ($\clubsuit$) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice de rang 1.

a) Montrer qu'il existe X et $Y \in K^n$ non nuls tels que $A = XY^T$.

b) Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $A^2 = \lambda A$.

c) Montrer que A est diagonalisable ssi $\operatorname{tr} A \neq 0$.

d) Montrer que A est semblable soit à une matrice λE_{11} (avec $\lambda \neq 0$) soit à E_{12}.

Diagonalisation par blocs

24) ($\clubsuit$) (*Centrale*) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $u^2 + \mathrm{Id} = 0$.

a) Montrer que n est pair.

b) Montrer que si $x \in E = \mathbb{R}^n$ n'est pas nul, alors $(x, u(x))$ est libre et que $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ est stable par u.

c) Soit $x \in E$ et F un sev stable par u. On suppose que $x \notin F$.

Montrer que F et $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ sont en somme directe.

d) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (x_1, u(x_1), x_2, u(x_2), ..., x_p, u(x_p))$ de E, et préciser $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$.

Classes de similitude

25) ($\clubsuit$) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de spectre $\{1\}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A^k et A sont semblables.

26) ($\clubsuit$) (X) On note $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = O_2\}$ et $\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 0\}$.

On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices semblables à J.

Exprimer $\mathcal{N}$ en fonction de $\mathcal{M}$. Montrer que $\mathcal{H} = \mathrm{Vect}(\mathcal{N})$.

Remarque : Noter au passage que $\mathcal{N}$ n'est pas un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

27) ($\clubsuit$) (*CCP*) Soit u un endomorphisme de rang 1 d'un K-espace vectoriel E de dimension n.

a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$, avec $\alpha_n = \mathrm{tr}\, u$.

b) Montrer que u diagonalisable ssi $\mathrm{tr}\, u \neq 0$.

c) Supposons $\mathrm{tr}\, u = 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que tous les α_i sont nuls, sauf α_{n-1} qui vaut 1.

d) Montrer que deux matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ de rang 1 sont semblables ssi elles ont même trace.

e) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ non nulle.

Montrer que $f : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K) \quad X \longmapsto X + \mathrm{tr}(X)A$ est diagonalisable ssi $\mathrm{tr}\, A \neq 0$.

28) (♣) (X) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $S = \{P^{-1}MP,\ P \in GL_n(\mathbb{R})\}$.

Montrer que S est borné si et seulement si M est une homothétie.

29) (♣) (X) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. On pose $S = \{P^{-1}MP,\ P \in GL_n(\mathbb{R})\}$.

Montrer que $S = \{\lambda I_n\}$, avec $\lambda \neq 0$, ssi tout élément de S a tous ses coefficients diagonaux non nuls.

30) (♣) (X, *Mines*) Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que A et $-A$ sont semblables.

Sev stables et commutant d'un endomorphisme

31) (♣) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ de rang 1.

a) Montrer que toute matrice de rang 1 est semblable à $(\mathrm{tr}\, A)E_{11}$ si $\mathrm{tr}\, A \neq 0$ et E_{1n} sinon.

b) Déterminer la dimension du commutant $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(K) \mid AB = BA\}$.

Endomorphismes cycliques

32) (♣) Soient E un K-ev de dim n, et $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe x tel que $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ est une base de E.

(ii) $(\mathrm{Id}, u, u^2, ..., u^{n-1})$ est libre.

33) (♣) (X) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\dim \mathrm{Ker}\, u = 1$

(ii) u nilpotent d'ordre n

(iii) Il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ est une base de E.

(iv) Les endomorphismes commutant avec u sont les polynômes en u.