Oraux. Série n^{o}20. Indications

1) On note B la matrice dont les coefficients diagonaux sont nuls et les autres valent 1.

Montrer que $\det B$ est impair. Montrer que $\det A$ et $\det B$ ont même parité. Conclure.

2) On considère le polynôme $P(t) = \det(A + tB)$.

En utilisant le fait que B n'est pas inversible, montrer que $\det P \leq 2$.

Conclure en notant que P admet au moins 3 racines.

3) Utiliser $\mathrm{rg}(AB) \leq \min(\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, B) \leq \min(n, p)$ et de même pour $\mathrm{rg}(BA)$.

4) Considérer la matrice de f dans la base canonique. On obtiendra $\det f = 1$.

5) a) Factoriser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; b) Trouver A et B telles que $A^2 = -B^2$; c) considérer E_{12} et E_{21}.

Droite des formes n-linéaires alternées sur K^n

6) b) On pose $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$. Montrer que $\det(E_1, E_2, ..., E_{j-1}, AE_j, E_{j+1}, ..., E_n) = a_{jj}$.

Déterminant de Van der Monde

7) b) Envisager d'abord le cas où les $a_1, a_2, ..., a_n$ sont deux à deux distincts.

c) Effectuer les opérations : $L_n := L_n - a_1 L_{n-1}$ puis $L_{n-1} := L_{n-1} - a_1 L_{n-2}$ puis ... puis $L_2 := L_2 - a_1 L_1$.

Solution : a) Pour tout $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$, $P(a_k) = 0$ (car la matrice admet deux colonnes égales).

En développant suivant la dernière colonne, on obtient $P(x) = \sum_{i=1}^n C_{in} x^{i-1}$, avec $C_{nn} = V(a_1, a_2, ..., a_{n-1})$.

Comme $\deg P \leq n-1$ et que $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ sont racines de P, alors $P(x) = V(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1}(x - a_k)$.

b) On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Immédiat pour $n = 1$, car $V(a_1) = 1$. Soit $n \geq 2$, et supposons la formule vraie au rang $(n-1)$. La formule est évidente si $a_1, a_2, ..., a_n$ ne sont pas deux à deux distincts, car dans ce cas, la matrice admet deux colonnes égales et $V(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$.

Sinon, on a par a), $V(a_1, a_2, ..., a_n) = V(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1}(a_n - a_k)$.

Par hyp de rec, on a $V(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1}(a_j - a_i)$, donc $V(a_1, a_2, ..., a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(a_j - a_i)$.

c) En Effectuant les opérations : $L_n := L_n - a_1 L_{n-1}$ puis $L_{n-1} := L_{n-1} - a_1 L_{n-2}$ ... puis $L_2 := L_2 - a_1 L_1$, on obtient $V(a_1, a_2, ..., a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) ... (a_n - a_1) V(a_2, a_3, ..., a_{n-1})$.

8) a) On peut retrancher à R_j une combinaison linéaire des précédentes de sorte à obtenir $\lambda_j X^j$.

b) Les coefficients de Q_j dans $(1, X, ..., X^{n-1})$ sont les $\frac{1}{i!} Q_j^{(i)}(0) = \frac{1}{i!} P^{(i)}(y_j)$.

Donc $\det_{\mathcal{B}}(Q_1, ..., Q_n) = \det(\frac{1}{i!} P^{(i)}(y_j))_{0 \leq i < n, 1 \leq j \leq n} = \det(\frac{1}{i!} P^{(j)}(y_i))_{0 \leq i < n, 1 \leq j \leq n}$.

On applique alors a) avec $R_j = \frac{1}{j!} P^{(j)}$. On obtient $V(y_1, ..., y_n) \times \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!}$.

c) Compte tenu de b), il suffit de prouver que $\det A = V(x_1, x_2, ..., x_n) \det(P_i(y_j))$, où $P_i(X) = P(X + y_j)$.

Matrice de permutation

9) On permute A_j et A_{n+1-j}, pour $j \leq \frac{1}{2}n$. Donc $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

On peut aussi procéder par récurrence : on obtient finalement $(-1)^{(n-1)+(n-2)+\dots} = (-1)^{n(n-1)/2}$.

On a $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$.

Matrice compagnon

10) *Première méthode* : Par récurrence en développant selon la première colonne.

Deuxième méthode : On suppose $x \neq 0$ et on applique la méthode du pivot en ajoutant à chaque ligne la précédente multipliée par $\frac{1}{x}$. Le cas $x = 0$ s'obtient pas continuité (ou par propriété des polynômes).

Troisième méthode : On développe selon la dernière colonne. Les cofacteurs obtenus sont des déterminants diagonaux par blocs, et les deux blocs sont triangulaires (supérieur et inférieur).

Autres exemples

12) a) Retrancher la première colonne aux autres colonnes, puis développer suivant la première colonne.

Variante : On considère le vecteur $F = (1, 1, ..., 1) \in K^n$. On a ainsi $d(x) = \det(xF + A_1, xF + A_2, ..., xF + A_n)$. Développer par n-linéarité en notant que tous les det contenant au moins deux F sont nuls (il reste $n+1$ termes).

b) Noter que la valeur de d en certains points est évidente. Conclure en utilisant a).

13) On peut procéder par récurrence (en devinant la formule générale).

On peut aussi supposer $x \neq 0$, et utiliser le pivot. On obtient : $P(x) = x^n + a_n x^{n-1} - (\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2)$.

Décomposition LU

14) a) On utilise le pivot par blocs : $\left(\begin{array}{c|c} B & Y \\ \hline X^T & \lambda \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & -B^{-1}Y \\ \hline O & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B & O \\ \hline X^T & \lambda - X^T B^{-1} Y \end{array}\right)$.

b) Ainsi, A est de la forme $A = \left(\begin{array}{c|c} B & Y \\ \hline X^T & \lambda \end{array}\right)$, avec $\det A \neq 0$ et les mineurs principaux de B sont non nuls.

On a : $\left(\begin{array}{c|c} B & Y \\ \hline X^T & \lambda \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & -B^{-1}Y \\ \hline O & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B & O \\ \hline X^T & \mu \end{array}\right)$, avec $\mu = \lambda - X^T B^{-1} Y$.

Comme A est inverisble et que $\det A = \mu \det B$, alors $\mu \neq 0$. Par hypothèse de récurrence, si $B = V^T U$, avec $V \in \mathcal{T}_n^*$ et $U \in \mathcal{T}_n^+$, d'où $\left(\begin{array}{c|c} B & O \\ \hline X^T & \mu \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} V^T & O \\ \hline X^T U^{-1} & \mu \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} U & O \\ \hline O & 1 \end{array}\right)$.

Donc $A = \left(\begin{array}{c|c} V^T & O \\ \hline X^T U^{-1} & \mu \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} U & O \\ \hline O & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & -B^{-1}Y \\ \hline O & 1 \end{array}\right)^{-1}$.