

Oraux. Série n°19. Indications

Familles libres, bases

- 1) Considérer $x + y$, où $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$.
- 2) Considérer $f : K^n \rightarrow K^p \quad X \mapsto Y$. La famille $(Y_j)_{1 \leq j \leq n}$ est génératrice dans K^p .
- 3) Supposons $(P_0, \dots, P_n)$ liée. Alors l'un des polynôme P_k est cl des suivants. Alors $(X - a)^{k+1}$ divise $P_k \dots$
- 4) Supposer $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k = 0$. Considérer la relation dans $\mathbb{C}$, et les valeurs en les ia_k .
- 5) Justifier le paramétrage par x : montrer que l'application linéaire $S \rightarrow E \quad (x, y) \mapsto x$ est bijective.

Dimension et rang

- 6) a) Montrer que si $B = (a_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ sous-matrice de A , $\text{rg } B \leq \text{rg } A$. Utiliser $C = (a_{ij})_{i \in I, 1 \leq j \leq p}$.
b) Extraire de A des colonnes formant une base, puis extraire de la sous-matrice obtenue des lignes formant une base.
En déduire l'existence d'une sous-matrice carrée inversible d'ordre $r = \text{rg } A$ (c'est-à-dire de rang r).
- 7) a) Appliquer le th du rang à la restriction de u à $\text{Im } u$. On a en effet $u(\text{Im } u) = \text{Im}(u^2)$.
b) On a $\text{Im}(u + v) = \{u(x) + v(x), x \in E\} \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$, donc a fortiori $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg } u + \text{rg } v$.
On a alors $\text{rg}(u) = \text{rg}(u + v - v) \leq \text{rg}(u + v) + \text{rg}(-v) = \text{rg}(u + v) + \text{rg}(v)$.
De même en inversant les rôles de u et v . Donc $|\text{rg } u - \text{rg } v| \leq \text{rg}(u + v)$.
- 8) Utiliser $\text{rg}(M + N) \leq \text{rg}(M) + \text{rg}(N)$, et en déduire avec soin $\text{rg } A = 2$.
- 9) a) $\text{Im } B = \text{Vect}(B_1, \dots, B_q) = K^p$; b) $\text{Ker } A = \{0\}$ et conclure avec le théorème du rang.
- 10) Montrer que $\text{Vect}(x_i - x_j)_{1 \leq i < j \leq n} = \text{Vect}(x_i - x_1)_{2 \leq j \leq n}$.
- 11) Commencer par justifier que $\dim(G \cap F) \geq \dim G - \text{codim } F$. D'où pour c) : $n - \sum_{k=1}^m (n - d_k) > 0$.
- 12) On trouvera $\dim G = n + p - 1$.

Matrices équivalentes

- 13) On écrit $A = P J_r Q$. Alors on veut $\forall M \in GL_n(K)$, $\text{tr}(P J_r Q M) = 0$, ce qui équivaut à $\text{tr}(J_r Q M P) = 0$, ce qui équivaut à $\forall N \in GL_n(K)$, $\text{tr}(J_r N) = 0$, car $N = Q M P$ décrit $GL_n(K)$ lorsque M décrit $GL_n(K)$.
En prenant $N = I_n$, on obtient $\text{tr}(J_r N) = r$, donc $r = 0$ et A est nécessairement la matrice nulle.
- 14) a) On rappelle que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r s'écrit $M = P J_r Q$, avec $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$.

Théorème du rang

- 15) Il s'agit ici de l'interpolation d'Hermite (variante de l'interpolation de Lagrange).
L'idée consiste en fait à prouver que $u : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad P \mapsto (P(a), P(b), P'(a), P'(b))$ est bijective.
Or, u est linéaire et injective, donc bijective par dimension, car $\dim \mathbb{R}_3[X] = \dim \mathbb{R}^4$.

Montrons que u est injective : Si $u(P) = 0$, alors a et b sont racines de P d'ordre ≥ 2 , donc $P = 0$ (car $\deg P \leq 3$).

16) a) Considérer le degré.

b) L'application $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \quad P \longmapsto P(X) + P(X+1)$ injective, donc bijective.

c) On a $\frac{1}{n}P'_n = P_{n-1}$. Considérons $Q_n = n \int_0^x P_{n-1}$. On a donc $P_n = Q_n - \lambda$.

Par intégration, on a $Q_n(x) + Q_n(x+1) - Q_n(1) = x^n$. Donc il faut prendre $\lambda = \frac{1}{2}Q_n(1)$.

Ainsi, on peut construire $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $P_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(x) = n \left(\int_0^x P_{n-1} - \frac{1}{2} \int_0^1 P_{n-1} \right)$.

17) a) On a $\text{rg}(f \circ g) = \text{rg } g - \dim(\text{Ker } f \cap \text{Im } g)$, donc $\dim(\text{Ker}(f \circ g)) \leq \dim E - \text{rg } g + \dim(\text{Ker } f)$.

b) On a $\text{rg } f + \text{rg } g \leq n$ par $f \circ g = 0$ et $\text{rg } f + \text{rg } g \geq \text{rg}(f + g) = n$. Donc $\text{rg } f + \text{rg } g = n$.

18) a) On a toujours $u(\text{Im } u^p) \subset \text{Im } u^p$.

$\text{rg}(u^p) = \text{rg}(u^{p+1})$ ssi $u(\text{Im } u^p) = \text{Im } u^p$, donc ssi la restriction $v = u|_{(\text{Im } u^p)}$ de u à $\text{Im } u^p$ est un isomorphisme.

Donc v^m est aussi un isomorphisme pour tout $m \in \mathbb{N}$, et $\text{rg}(v^m) = \text{rg}(u^{p+m}) = \text{rg}(u^p)$.

b) Si on avait $\text{rg } u^2 = \text{rg } u$, alors par a), pour tout $k \geq 1$, $\text{rg}(u^k) = \text{rg}(u)$.

Mais il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^m = 0$. Donc $\text{rg}(u) = 0$, c'est-à-dire $u = 0$ (endomorphisme nul).

c) A^2 est nilpotente, donc A est nilpotente. Donc $\text{rg } A < 3$. Mais par b), $\text{rg } A > \text{rg } A^2 = 2 \dots$

Formes linéaires

19) Montrer que les $\varphi_k : P \longmapsto P(a_k)$ forment une base du dual de $\mathbb{R}_n[X]$.

Variante : Utiliser la décomposition de P dans la base de Lagrange.

20) a) Considérons l'application $u : E \rightarrow K^2 \quad x \longmapsto (f(x), g(x))$.

On a $\text{Ker } u = \text{Ker } f \cap \text{Ker } g$ de dimension $n - 2$, car sinon, f et g seraient liées.

Donc u est surjective (par le th du rang).

Remarque : On peut montrer qu'on a alors $\text{Vect}(x, y) \oplus (\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) = E$.

b) Matriciellement, par le choix d'une base, on identifie E et K^n .

Le système $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ s'écrit $AB = I_n$, où les lignes de A correspondent aux f_i et les colonnes de B correspondent aux e_j . Par hypothèse, A est inversible, donc $B = A^{-1}$ convient (et est inversible).

Systèmes linéaires et opérations élémentaires

21) Utiliser des opérations par blocs (en prenant A comme "bloc pivot").

22) Toute solution M est nécessairement de la forme $B + \lambda A$.

23) Considérons X non nul tel que $AX = X$, et considérons k tel que $|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Applications linéaires

24) *Conseil* : ($\Rightarrow$) Se ramener aux cas des matrices J_r par un choix de bases judicieux.

Endomorphismes

25) a) $p = \min\{n \in \mathbb{N} \mid f^n(x) = 0\}$ partie non vide de $\mathbb{N}$. On a $p \geq 1$ car $f^0 = \text{Id}$.

b) Supposons $\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \dots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x) = 0$. Composer par f^{p-1} et en déduire $\lambda_0 = 0$.

Procéder de même pour les autres termes (et montre $\lambda_j = 0$ par récurrence forte).

Variante : Considérer $q = \min\{k \mid \lambda_k \neq 0\}$ en supposant les λ_j non tous nuls, et composer par $f_{/}^{(p-q-1)}$.

c) On a $\dim \text{Ker } f = 1$, d'où $\text{rg } f^k \geq n - k$, et donc $f^{n-1} \neq 0$. Il existe donc x tel que $f^{n-1}(x) = 0$.

On a aussi $f^n(x) = 0$, donc par b), $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre, donc une base de E .

Projecteurs

26) Dans une base adaptée, la matrice de p est J_r , où $r = \text{rg } p$.

27) Soient V un ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(V)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe $\pi \in \mathcal{L}(V, \text{Im } f)$ et $i \in \mathcal{L}(\text{Im } f, V)$ tels que $f = i \circ \pi$ et $\pi \circ i = \text{Id}_{\text{Im } f}$.

ii) $f \circ f = f$.

28) a) $\text{card } S_n = n!$

a) Rappeler le cardinal de S_n . Montrer que pour tout $\tau \in S_n$, $\varphi_\sigma : S_n \rightarrow S_n \quad \tau \mapsto \tau \circ \sigma$ est bijective.

b) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. On note f_σ l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.

Montrer que $p_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$ est un projecteur et donner ses caractéristiques.

29) *Indication* : Pour g , utiliser $p + q - p \circ q = \text{Id} - (\text{Id} - p)(\text{Id} - q)$.

Indication : Les sev propres E_0 et E_1 de p sont stables par q , et les restrictions de q sont aussi des projecteurs.

On en déduit qu'on peut codiagonaliser p et q : on se ramène à des matrices diagonales de valeurs propres 0 et 1 :

On en déduit que r est la projection sur $(\text{Im } p + \text{Im } q)$ parallèlement à $(\text{Ker } p \cap \text{Ker } q)$.

Une autre méthode consiste à montrer algébriquement que $r^2 = r$ à partir de $p^2 = p$, $q^2 = q$ et $pq = qp$.

30) Sachant que $\text{rg}(f + g) = n$, montrer que $\text{rg } f + \text{rg } g = n$. On a ainsi $\dim(\text{Im } f + \text{Im } g) = \text{rg } f + \text{rg } g$.

En déduire $\text{Im } f \oplus \text{Im } g = E$. En utilisant $f + g = \text{Id}$, montrer que $\text{Ker } g = \text{Ker}(f - \text{Id}) = \text{Im } f$. Conclure.

Espaces de matrices

31) a) Utiliser $E_{ij}E_{kl} = \lambda_{jk}E_{il}$.

b) Supposons que φ convienne. Alors par a), on obtient $\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{jj})$ et $\varphi(E_{ij}) = 0$ si $i \neq j$. Donc $\varphi = \lambda \text{tr}$.

Remarque : Une autre méthode consiste à chercher φ sous la forme $\varphi(A) = \text{tr}(AM)$.

32) a) On a $AE_{ij} = \sum_{k,l} a_{kl}E_{kl}E_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki}E_{kj}$.

On choisit de classer les (E_{ij}) selon l'ordre lexicographique (j, i) de sorte que les E_{kj} , avec $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, soient consécutifs pour cet ordre.

On obtient $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_A)$ diagonale par blocs, avec n blocs valant A : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_A) = \begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{pmatrix}$.

A est équivalente à J_r , on obtient $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_A)$ équivalente à une matrice diagonale (en remplaçant A par J_r).

Donc $\text{rg } \phi_A = n \text{ rg } A$.

b) On a $\det \phi_A = (\det A)^n$. On a $\psi_{A,B} = \phi_A \circ \phi'_B$, où $\phi'_B : M \mapsto MB$ est, de même, de déterminant $(\det B)^n$.

Donc $\det \psi_{A,B} = (\det A)^n (\det B)^n$.

Remarque : On considère $\phi_u : v \mapsto u \circ v$. On considère $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ bases de E telles que $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} u = J_r$.

Si $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}} v$, on a $J_r M = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} v$. Les applications $v \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}} v$ et $v \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} v$ sont des isomorphismes.

Donc ϕ_u est de même rang que l'application $M \mapsto J_r M$. Or, pour $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array} \right)$, $J_r M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O & O \end{array} \right)$.

33) On note $u : K^n \rightarrow K^n$ l'application linéaire associée à A (on ne considère pas u comme endomorphisme).

Considérer une base $\mathcal{B}$ adaptée à $S \oplus \text{Ker } u = K^n$ et une base $\mathcal{C}$ adaptée à $\text{Im } u \oplus T = K^n$.

On se ramène ainsi au cas où $A = I_r$. Considérer la forme de $M = \text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} v$ lorsque $v \circ u = 0$ (ce qui équivaut à

$\text{Im } u \subset \text{Ker } v$, ssi M admet ses r premières colonnes nulles), resp. lorsque $u \circ v = 0$ (ce qui équivaut à $\text{Im } v \subset \text{Ker } u$, ssi

M admet ses r premières lignes nulles), resp. lorsque $u \circ v \circ u = 0$ (ce qui équivaut à M est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} O_r & * \\ \hline * & * \end{array} \right)$,

car on a $\left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} M_{11} & O \\ \hline O & O \end{array} \right)$.

Les dimensions des sev $\mathcal{M}_n(K)$ ainsi définies sont donc respectivement $n(n-r)$, $(n-r)n$ et r^2 .