Oraux. Série n°19. Algèbre linéaire

Familles libres, bases

1) (♣) (*X, Mines, Centrale*) Soient F et G deux sev stricts de E. Peut-on avoir $E = F \cup G$?

2) (♣) Soient des entiers naturels $p \leq n$. Pour $X \in K^n$, on pose $Y = (x_i)_{1\leq i\leq p}$. Ainsi, $X = \left(\dfrac{Y}{Z}\right)$.

Soit $(X_j)_{1\leq j\leq n}$ une base de K^n. Montrer qu'il existe $J \subset [\![1, n]\!]$ telle que $(Y_j)_{j\in J}$ est une base de K^p.

3) (♣) (*X*) Soient $a \neq b$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $P_k = (X - a)^k(X - b)^{n-k}$. Montrer que $(P_0, ..., P_n)$ est libre.

4) (♣) (*Centrale*) Soient $a_1, ..., a_n$ des réels positifs distincts, et $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 + a_k^2}$.

Montrer que $(f_1, ..., f_n)$ est libre dans $C^0(]0, +\infty[, \mathbb{R})$.

5) (♣) (*X*) Soient E et F deux ev de dimension finie. Montrer que tout supplémentaire S de $\{0\} \times F$ dans $E \times F$ est de la forme $\{(x, f(x)),\ x \in E\}$, où $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Dimension et rang

6) (♣) Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg} v - \dim(\operatorname{Im} v \cap \operatorname{Ker} u)$ et $|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leq \operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$.

7) (♣) (*Centrale*) Soient $n, p \geq 3$. Calculer le rang de la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, où $a_{ij} = (i + j - 1)^2$.

Remarque : Cas général : où $a_{ij} = (x_i + y_j)^2$.

8) (♣) (*X*) Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$. On note $(K^p)^*$ le K-ev des matrices lignes $\mathcal{M}_{1,p}(K)$.

a) On suppose que les colonnes de B engendrent K^p. Montrer que $\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg}(A)$.

a) On suppose que les vecteurs lignes de A engendrent $(K^p)^*$. Montrer que $\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg}(B)$.

9) (♣) Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une famille d'un K-ev E. Montrer que $\operatorname{rg}(x_i - x_j)_{1\leq i<j\leq n} \leq (n - 1)$.

10) (♣) (*X*) Soit E un K-ev de dimension finie n, et H_k des hyperplans de E.

a) Proposer une minoration (optimale) de $\dim(H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_m)$.

b) Même question pour $\dim(F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_m)$, en posant $d_k = \dim F_k$.

c) Donner une condition sur m et p assurant l'existence d'un vecteur non nul commun aux F_k, avec $1 \leq k \leq m$.

11) (♣) (*X*) Soient E et F deux ev de dimensions n et p, $e = (e_1, ..., e_n)$ base de E et $e = (f_1, ..., f_p)$ base de F.

a) Montrer que $(e_i - e_1)_{2\leq i\leq n}$ est une famille libre.

b) Donner une base de $E \times F$ ainsi que sa dimension.

c) Soit G le sev de $E \times F$ engendré par les (e_i, f_j), avec $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., p\}$. Déterminer $\dim G$.

12) (♣) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Montrer que $\operatorname{rg} A$ est l'ordre maximal des sous-matrices carrées inversibles de A.

Matrices équivalentes

13) (♣) Montrer que la matrice nulle est la seule matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\forall M \in GL_n(K)$, $\operatorname{tr}(AM) = 0$.

14) (♣) (*X*) a) Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ de rang r. Montrer qu'il existe des $X_i \in K^n$ et $Y_i \in K^p$ tels que $M = \sum_{i=1}^r X_i Y_i^T$.

b) On suppose $M = \sum_{i=1}^s X_i Y_i^T$. Montrer que $r \leq s$.

Théorème du rang

15) ($\clubsuit$) Soient a et b des réels distincts, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^4.

a) Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tels que $P(a) = f(a)$, $P(b) = f(b)$, $P'(a) = f'(a)$ et $P'(b) = f'(b)$.

16) ($\clubsuit$) (*Centrale*)

a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) + P(X+1) = 0$. Montrer que $P = 0$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) + P(X+1) = X^n$.

c) Trouver une relation entre P_n' et P_{n-1}. En déduire une formule récursive définissant $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

17) ($\clubsuit$) Soit E un K-ev de dimension finie n, et soient f et $g \in \mathcal{L}(E)$.

a) (X) Montrer que $\dim(\operatorname{Ker}(f \circ g)) \leq \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Ker} g)$.

b) (*Centrale*) On suppose $f \circ g = 0$ et $f + g \in GL(E)$. Montrer que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = n$.

18) ($\clubsuit$) a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si $\operatorname{rg}(u^p) = \operatorname{rg}(u^{p+1})$, alors pour tout $k \geq p$, $\operatorname{rg}(u^k) = \operatorname{rg}(u^p)$.

b) On suppose u nilpotent non nul. Montrer que $\operatorname{rg} u^2 < \operatorname{rg} u$.

c) En déduire qu'il n'existe aucune matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Formes linéaires

19) ($\clubsuit$) (X) Soient $a_0, a_1, ..., a_n$ des réels disticnts.

Montrer qu'il existe $(c_0, ..., c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 P(t)\, dt = \sum_{k=0}^n c_k P(a_k)$.

20) ($\clubsuit$) a) (*Centrale*) Soient f et $g : E \to K$ deux formes linéaires indépendantes.

Montrer qu'il existe x et y vecteurs de E tels que $(f(x), f(y)) = (1, 0)$ et $(g(x), g(y)) = (0, 1)$.

b) Généralisation : Soit $(f_1, ..., f_n)$ une base de E^*. Montrer qu'il existe une base $(x_1, ..., x_n)$ de E telle que $f_i(e_j) = \delta_{ij}$.

Systèmes linéaires et opérations élémentaires

21) ($\clubsuit$) (X) Soient $A \in GL_p(K)$ et $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & C \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer que $\operatorname{rg}(M) = p + \operatorname{rg}(C)$.

22) ($\clubsuit$) (*Mines*) Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Résoudre $M + (\operatorname{tr} M)A = B$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

23) ($\clubsuit$) (X) *Matrices à diagonale dominante.*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1$. Montrer que $I_n - A$ est inversible.

Applications linéaires

24) ($\clubsuit$) (*Mines*) *Lemme de factorisation.* Soient E, F et G des K-ev de dimension finie.

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(E, G)$. Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g \Leftrightarrow \exists\, h \in \mathcal{L}(F, G)$, $g = h \circ f$.

25) ($\clubsuit$) (X *complété*) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec $\dim E = n$. On suppose f nilpotent, c'est-à-dire $f^n = 0$.

a) Soit $x \in E$ non nul. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p(x) = 0$ et $f^{p-1}(x) \neq 0$.

b) Montrer que $(x, f(x), ..., f^{p-1}(x))$ est libre.

c) On suppose $\operatorname{rg} f = n - 1$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), ..., f^{n-1}(x))$ est une base de E.

Projecteurs

26) ($\clubsuit$) Montrer que pour tout projecteur p, on a $\operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$.

27) Soient V un ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(V)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe $\pi \in \mathcal{L}(V, \operatorname{Im} f)$ et $i \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} f, V)$ tels que $f = i \circ \pi$ et $\pi \circ i = \mathrm{Id}_{\operatorname{Im} f}$.

ii) $f \circ f = f$.

28) ($\clubsuit$) On note S_n le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$. Soit $\sigma \in S_n$.

a) Rappeler le cardinal de S_n. Montrer que pour tout $\tau \in S_n$, $\varphi_\sigma : S_n \to S_n \quad \tau \mapsto \tau \circ \sigma$ est bijective.

b) Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. On note f_σ l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.

Montrer que $p_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$ est un projecteur et donner ses caractéristiques.

29) ($\clubsuit$) (X) Soient p et $q \in \mathcal{L}(E)$ des projecteurs qui commutent.

Montrer que $f = p \circ q$ et $g = p + q - p \circ q$ sont des projecteurs. Déterminer leurs images et leurs noyaux.

30) ($\clubsuit$) (*Centrale*) Soient f et $g \in \mathcal{L}(E)$, avec $\dim E = n$. On suppose $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \leq n$ et $f + g = \mathrm{Id}$.

Montrer que $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g = E$ et que f et g sont des projecteurs.

Remarque : Se généralise à une famille d'endomorphismes vérifiant $\sum_{i=1}^{p} \operatorname{rg} f_i \leq n$ et $\sum_{i=1}^{n} f_i = \mathrm{Id}$.

Espaces de matrices

31) ($\clubsuit$) a) On note E_{ij} les matrices canoniques de $\mathcal{M}_n(K)$. Calculer $E_{ii}E_{ij}$, $E_{ji}E_{ii}$, $E_{ij}E_{ji}$ et $E_{ji}E_{ij}$ pour $i \neq j$

b) Montrer que les formes linéaires φ sur $\mathcal{M}_n(K)$ telles que $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ sont les $\lambda \operatorname{tr}$.

32) ($\clubsuit$) (*Mines*) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On considère $\varphi_A : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K) \quad M \longmapsto AM$.

a) Déterminer la matrice de ϕ_A dans la base canonique (E_{ij}). En déduire $\operatorname{rg} \phi_A = n \operatorname{rg} A$.

b) Déterminer $\det \phi_A$ et en déduire $\det \psi_{A,B}$, où $\psi_{A,B} : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K) \quad M \longmapsto AMB$.

Remarque : On peut retrouver le résultat du a) en se ramenant au cas $A = J_r$.

33) ($\clubsuit$) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ de rang r.

Déterminer $\dim\{B \in \mathcal{M}_n(K) \mid AB = O\}$, $\dim\{B \in \mathcal{M}_n(K) \mid BA = O\}$ et $\dim\{B \in \mathcal{M}_n(K) \mid ABA = O\}$.