Oraux. Série n°18. Indications

1) $I_n = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} f(\frac{u}{n})e^{-u}\ du$, et utiliser $\left|f(\frac{u}{n})\right| e^{-u} \leq Me^{pu/n}e^{-u} \leq Me^{-u/2} = \varphi(u)$ pour $n \geq 2p$.

Variante : Poser $f(t) = g(t)e^{pt}$, pour se ramener au cas où g est bornée. On obtient $I_n \sim \frac{f(0)}{n+p} \sim \frac{f(0)}{n}$.

2) a) $|e^{-tx}\ f(t)| \leq |f(t)|$ et $\forall t > 0$, $\lim_{x\to+\infty} e^{-tx}\ f(t) = 0$.

b) Par IPP, $\int_0^A e^{-tx}\ f(t)\ dt = \frac{1}{x}(f(0) - e^{-Ax}\ f(A)) + \frac{1}{x}\int_0^A e^{-tx}\ f'(t)\ dt$.

Or, f est bornée, car $|f(A)| \leq |f(0)| + \int_0^A |f'(t)|\ dt \leq |f(0)| + \int_0^{+\infty} |f'|$.

On a donc $g(x) = \frac{f(0)}{x} + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-tx}\ f'(t)\ dt$, et par a), $g(x) = \frac{f(0)}{x} + \frac{1}{x}\mathfrak{o}_{+\infty}(1) \sim \frac{f(0)}{x}$.

c) Considérer $g(x)$ comme la valeur moyenne de $f(t)$ pondérée par xe^{-tx}.

On peut aussi couper la somme en 2, et appliquer a) à la restriction sur un segment.

Remarque : On ne peut appliquer ici simplement la convergence dominée à $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-u}\ f(\frac{u}{x})\ du$.

3) *Première méthode* : En posant $t = \left(1 - \dfrac{u}{n}\right)$, on obtient $I_n = \dfrac{1}{n}J_n$, avec $J_n = \int_0^n \left(1 - \dfrac{u}{n}\right)^n f\left(1 - \dfrac{u}{n}\right)\ du$.

Par convergence dominée, on obtient $\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} e^{-u} f(1)\ du = f(1)$.

Remarque : On applique la cv dominée aux fonctions $g_n(u) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{u}{n}\right)^n f\left(1 - \dfrac{u}{n}\right) \text{ si } u \in [0, n] \\ 0 \text{ si } u \in [n, +\infty[\end{cases}$

Variante : Avec $x = t^n$, on a $I_n = \dfrac{1}{n}J_n$ et $J_n = \int_0^1 x^{1/n}\ f(x^{1/n})\ dx \to f(1)$.

On utilise comme fonction de domination $\varphi(x) = \sup |f|$ car φ intégrable sur $]0, 1]$.

Interprétation en termes de transformée de Laplace et méthode variante : On a $I_n = \int_0^1 e^{n\ln t} f(t)dt$.

Avec $u = -\ln t$, c'est-à-dire $t = e^{-u}$, on obtient $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nu}\ g(u)\ du$, avec $g(u) = f(e^{-u})e^{-u}$.

Seconde méthode : Intégrations par parties; Permet d'obtenir un DA à tous ordres.

3) bis) *Indication* : (i) $I_n \leq M^n$; (ii) $\exists\, \alpha > 0$, $I_n \geq \alpha M^n$

(iii) Utiliser $f(u/n)^n \to e^{-\lambda u}$ et on pourra justifier qu'il existe $\mu > 0$ tel que $f(x) \leq (1 - \mu x)$, d'où $f(u/n)^n \leq e^{-\mu u}$.

4) a) Le plus simple est d'utiliser $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$, et d'en déduire $\frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{3(n-2)}$.

Une autre solution est d'intégrer par parties. On pourrait aussi utiliser la cv dominée avec $u = x^n$.

b) cf méthode de Laplace : Effectuer le changement de variable $x = \frac{u}{n}$.

5) a) Montrer que $I_n = \int_0^1 \dfrac{1-x}{1-x^n}\ dx$ tend vers $\int_0^1 (1-x)\ dx = \dfrac{1}{2}$par convergence dominée (par 1).

On a $I_n - \dfrac{1}{2} = \int_0^1 (1-x)\ \left(\dfrac{1}{1-x^n} - 1\right)\ dx = \int_0^1 \dfrac{1-x}{1-x^n}\ x^n\ dx =\sim \dfrac{1}{n}\int_0^1 \dfrac{1-u^{1/n}}{1-u}\ u^{1/n}\ du$.

On utilise la domination $\dfrac{1-u^{1/n}}{1-u} \leq 1$, et on en conclut que $I_n - \dfrac{1}{2} \sim \dfrac{1}{n}$.

b) On a $J_n = \dfrac{1}{n^2}K_n$, avec $K_n = \int_1^{+\infty} \dfrac{u}{(1+u/n)^n - 1}\ du \to \int_0^{+\infty} \dfrac{u}{e^u - 1}\ du = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

On utilsie ici la fonction de domination $(1+u/n)^n - 1 \geq \frac{n(n-1)(n-2)}{6}u^3 \geq \frac{1}{12}u^3$ pour n assez grand.

Pondérations convergeant vers un Dirac

6) a) Effectuer le changement de variable $t = \dfrac{x}{\sqrt{n}}$, et utiliser $\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\ dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

b) Une majoration grossière permet de conclure : noter que $f_n(x) \leq \frac{1}{u_n}(1-x^2)^n$.

Exemples de recherche d'équivalents dans les séries

7) On pose $g_n(x) = \dfrac{1}{n+n^2x}$. On a $g_n(x) \sim \dfrac{1}{n^2x}$, d'où l'existence $f(x)$.

Pour tout $a > 0$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{x\in[a,+\infty[} |g_n(x)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2a} < +\infty$.

Donc $f = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ est continue par convergence normale.

b) En $+\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} xf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

En 0, on utilise une comparaison avec une intégrale : La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t+t^2x}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$.

$\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t+t^2x} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{1+x} + \int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t+t^2x}$. Or, $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t+t^2x} = \int_1^{+\infty} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{x}{1+tx}\right)\ dt = \left[\ln\left(\dfrac{t}{1+tx}\right)\right]_1^{+\infty}$.

On en déduit que $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t+t^2x} \sim_0 -\ln x$, et on en conclut par pincement que $f(x) \sim_0 -\ln x$.

8) a) On a $\dfrac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$, d'où la convergence pour tout $x \in]0,1]$.

La convergence est normale sur tout segment $[0,a[$, avec $a < 1$. Donc f est continue.

b) On a $\dfrac{x^n}{1+x^n} = \dfrac{e^{n\ln x}}{1+e^{n\ln x}}$. On pose $u = -\ln x$. La fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-tu}}{1+e^{-tu}} = \dfrac{1}{1+e^{tu}}$ décroît sur $[0,+\infty[$.

Lorsque x tend vers 1^-, u tend vers $+\infty$.

On obtient $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+e^{tu}}\ dt \leq f(x) \leq \dfrac{1}{1+1} + \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+e^{tu}}\ dt$. Or, $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+e^{tu}}\ dt = \dfrac{1}{u}\int_0^{+\infty} \dfrac{v}{1+v}\ dv = \dfrac{\ln 2}{u}$.

On en conclut que lorsque x tend vers 1^-, $f(x) \sim -\dfrac{\ln 2}{\ln x} \sim \dfrac{\ln 2}{1-x}$.