Oraux. Série n°18. Méthode de Laplace et recherche d'équivalents d'intégrales

1) (♣) *Transformée de Laplace (cas d'une fonction bornée et variée)*

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $f(t) = O_{+\infty}(e^{pt})$.

On considère $\forall n > p$, $I_n = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt} dt$. Montrer que $I_n \sim \frac{f(0)}{n}$.

2) (♣) (ENS) *Transformée de Laplace (cas des fonctions intégrables)*

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue intégrable, avec $f(0) \neq 0$. On considère $\forall x > 0$, $g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t) dt$.

a) Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}^+$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

b) On suppose f de classe C^1 et f' intégrable. Déterminer un équivalent de g en $+\infty$.

c) Donner un équivalent de g dans le cas général.

3) (♣) *Moments d'une fonction $f : [0, 1]$ continue, avec $f(1) \neq 0$. Déterminer un équivalent de $I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$.*

3) bis) (Centrale) Soit $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^+)$. On pose $M = \sup f$ et $\lambda = f'(0)$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = n \int_0^1 f(t)^n dt$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ dans chacun des cas suivants : (i) $M < 1$, (ii) $M > 1$, (iii) $f(0) = 1$ et $f' < 0$.

4) (♣) a) (X) Déterminer la limite et un équivalent de $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2} dx$.

b) (X) Déterminer la limite et un équivalent de $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x+x^2)^n} dx$.

5) (♣) On pose $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}$ et $J_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}$.

a) (Mines) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = L$, puis déterminer un équivalent de $(I_n - L)$.

b) (X) Montrer que $J_n \sim \frac{\pi^2}{6n^2}$.

Pondérations convergeant vers un Dirac

6) (♣) (X-ESPCI) a) On pose $u_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et montrer que $u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

Remarque : On suppose connu $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

b) On considère $f_n(x) = \frac{1}{u_n} \int_x^1 (1-t^2)^n dt$. Montrer que $\forall x \in]0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

c) Représenter l'allure du graphe de $F : x \mapsto \int_0^x (1-t^2)^n dt$ pour n grand.

d) Soit $\omega : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} \int_{-1}^1 (1-t^2)^n \omega(t) dt$.

Exemples de recherche d'équivalents dans les séries

7) (♣) On considère $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \ x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$.

a) Montrer que f est bien définie et continue.

b) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ et quand x tend vers $+\infty$.

8) (♣) (Mines) On considère $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R} \ x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$.

a) Montrer que f est bien définie et continue.

b) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1^- .