Oraux. Série n°17. Indications

1) b) Considérer $[a,b] \subset +\infty$, et $\varphi_p(t) = (\ln t)^p t^{a-1} e^{-t}$ si $t \in]0,1]$ et $(\ln t)^p t^{b-1} e^{-t}$ si $t \geq 1$.

c) On a $(\ln \Gamma)'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ et $(\ln \Gamma)''(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma'(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma(x)^2}$ (et utiliser Cauchy-Schwarz).

Pour prouver que $(\ln \Gamma)'(x) \sim_{+\infty} \ln x$, utiliser $(\ln \Gamma)'(x+1) - (\ln \Gamma)'(x) = \frac{1}{x}$ et justifier avec soin.

2) On a $F''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(tx) e^{-t}\, dt = \frac{1}{1+x^2}$, et $F(0) = F'(0) = 0$.

Donc $F(x) = \int_0^x \arctan(x)\, dx = x \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ obtenu en intégrant par parties.

Solution :

Avec $f(t,x) = \dfrac{1-\cos(tx)}{t^2}\, e^{-t}$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \dfrac{\sin(tx)}{t} e^{-t}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = \cos(tx)e^{-t}$, qui sont continues en x.

On a $t \longmapsto f(t,x)$ intégrable (pour tout x), $\forall x \in [-a,a]$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq a e^{-t}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq e^{-t}$.

On en déduit que F est de classe C^2, et $F''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(tx)e^{-t}\, dt = \mathrm{Re}(\int_0^{+\infty} e^{-(1-ix)t}\, dt) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \frac{1}{1+x^2}$.

D'autre part, $F(0) = 0$ et $F'(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t,0)\, dt = 0$. D'où $F'(x) = \arctan(x)$ et $F(x) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

3) Justifier que $D =]0,+\infty[$. Justifier que $f'(x) = t^{x-1}(t-1) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$.

4) Avec $F(x,t) = \dfrac{\sin(xt)}{e^t - 1}$, on a $\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t}{e^t-1}\, |\cos(xt)| \leq \dfrac{t}{e^t-1}$.

On a $\dfrac{\sin(xt)}{e^t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(xt) e^{-nt}$. Pour pouvoir appliquer le théorème ITT, noter que $\left|\sin(xt)e^{-nt}\right| \leq xte^{-nt}$.

En effet, la majoration$\left|\sin(xt)e^{-nt}\right| \leq e^{-nt}$ ne permet pas de conclure, car $\int_0^{+\infty} e^{-nt}\, dt = \dfrac{1}{n}$.

5) a) La fonction intégrée tend vers $(b-a)$ en $t = 0^+$ et est en $O_{+\infty}(e^{-at})$.

Montrer que $f'(x) = \mathrm{Re}\left(i \int_0^{+\infty} e^{(ix-a)t} - e^{(ix-b)t}\, dt\right) = \frac{x}{b^2+x^2} - \frac{x}{a^2+x^2}$.

c) La fonction $\varphi(t) = (e^{-at} - e^{-bt})/t$ est dérivable (et même DSE en 0), et on a $\varphi'(t) = O_{+\infty}(e^{-at})$.

Donc par IPP, $f(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} |\varphi'(t)|\, dt$, d'où (cf preuve du lemme de Lebesque) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Donc $k = 0$.

6) $f'(x) = \int_0^{+\infty} ite^{-at^2/2} e^{ixt}\, dt = -\frac{x}{a} f(x)$.

7) Le plus judicieux est d'effectuer dès le début un changement de variable affine.

a) Posons $M = \sup f$. On a $P_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)\ f(x+tu)\, du$.

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)\ du = \sqrt{2\pi}$. Donc $|P_t(x)| \leq \sup|f|$.

On peut appliquer le th sur les intégrales paramétrées, et on a $P_t^{(k)}(x) = \frac{t^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)\ f^{(k)}(x+tu)\, du$.

On peut appliquer le th de cv dominée en $\pm\infty$, en considérant la domination par $\varphi(u) = M\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)$.

b) On a à nouveau par convergence dominée : $\lim_{t\to+\infty} P_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)\ f(x)\, du = f(x)$.

c) On trouve $g^{(k)}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)\ u^k\ f^{(k)}(0)\, du = C_k\ f^{(k)}(0)$, où $C_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)\ u^k\, du$.