Oraux. Série n°17. Intégrales paramétrées

1) (♣) On considère $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

a) Montrer que pour tout $x>0$, $\Gamma(x)$ est bien défini et que $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

b) Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

c) Montrer que $\ln\Gamma$ est convexe (c'est-à-dire $(\ln\Gamma)''\geq 0$), et que $(\ln\Gamma)'(x)\sim_{+\infty}\ln x$.

2) (♣) (X) Montrer que $F(x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{(1-\cos(tx))}{t^2}\,e^{-t}\,dt$ est bien définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Calculer $F(x)$.

3) (♣) (*Mines*) On considère $f(x)=\int_0^1\dfrac{t^{x-1}(t-1)}{\ln t}\,dt$. Déterminer le domaine de définition D et calculer $f(x)$.

4) (♣) (*Mines, X*) Montrer que $f(x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin(xt)}{e^t-1}\,dt$ est définie et C^1 sur $\mathbb{R}$, et que $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x}{x^2+n^2}$.

5) (♣) (*Centrale*) Pour $0<a<b$, on pose $f(x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\cos(xt)\,dt$.

a) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est de classe C^1.

b) En déduire qu'il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2+x^2}{a^2+x^2}\right)+k$.

c) Montrer que $f(x)=-\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}h(t)\sin(xt)\,dt$, où h est intégrable sur $]0,+\infty[$. En déduire $k=0$.

6) (♣) (*Centrale, Mines*) *Transformée de Fourier d'une gaussienne*

Soit un réel $a>0$. On considère $\forall f\in\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^{+\infty}e^{-at^2/2}e^{ixt}\,dt$. On donne $G=\int_{+\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}$.
Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f. En déduire $f(x)=\sqrt{\frac{2\pi}{a}e^{-x^2/2a}}$.

7) (♣) (*ENS*) Soit E l'ensemble des fonctions de classe C^∞ convergeant vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.
Soit $f\in E$. Pour $x\in\mathbb{R}$ et $t>0$, on pose $P_t(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\dfrac{(x-y)^2}{2t^2}\right)\,f(y)\,dy$.

a) Montrer que f est bornée. Montrer que P_t appartient à E.

b) Soit $x\in\mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{t\to+\infty}P_t(x)$.

c) On suppose que les $f^{(k)}$ sont bornées pour tout entier k.

Calculer les dérivées successives en 0 de $g:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ où $g(t)=P_t^{(k)}(x)$ pour $t>0$ et où $g(0)=f(x)$.

8) (♣) (*Mines*) On considère $f:x\longmapsto\int_0^{+\infty}\arctan(t)\,e^{-xt}\,dt$ et $g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,e^{-xt}\,dt$.

a) Montrer que f est définie et continue sur $]0,+\infty[$, et exprimer $f(x)$ en fonction de $g(x)$.

b) Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+, et lorsque x tend vers $+\infty$ (en utilisant $g(x)$).