Oraux. Série n°16. Indications

Théorème d'intégration terme à terme

1) $\int_0^1 t^n \ln t \; dt = \frac{1}{(n+1)^2}$. *Autre méthode* : Justifier et utiliser $\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} \; du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2) $\frac{\sqrt{t}}{e^t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{t}e^{-nt}$, et $\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-nt} \; dt = \frac{1}{n^{3/2}} \int_0^{+\infty} \sqrt{u}e^{-u} \; du = \frac{1}{n^{3/2}}\Gamma(\frac{3}{2})$, et $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Utiliser ITT pour conclure.

3) a) $J = \int_0^1 \dfrac{\ln u}{1-u^2} \; du = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$. b) $\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{\operatorname{sh} x} \; dx = 2\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-(2n+1)x} \; dx$.

Théorème de convergence dominée

4) a) Utiliser le changement de variable $t = \frac{u}{\sqrt{n}}$, et conclure par cv dominée et avec $\int_0^{+\infty} e^{-u^2 \; du} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

b) Idem Wallis : effectuer une intégration par parties (en intégrant 1 en t), puis noter que $\frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} = \frac{(1+t^2)-1}{(1+t^2)^{n+1}}$.

c) Utiliser le changement de variable $t = \tan\theta$. On a $1+t^2 = 1/\cos^2\theta$, d'où $I_n = W_{2n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5) On a $F(x) = \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t) \; dt = \int_0^1 f(\theta x) \; d\theta$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers $+\infty$.

On a $\forall\theta \in]0,1]$, $\lim_{n\to+\infty} f(\theta x_n) = L$. *Remarque* : On exclut $\theta = 0$ poiur simplifier la limite obtenue.

La fonction f est continue et convergeant en $+\infty$, donc bornée. Posons $M = \sup f$.

L'hypothèse de domination est vérifiée : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall\theta \in]0,1]$, $|f(\theta x_n)| \leq M = \varphi(\theta)$ intégrable sur $]0,1]$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \int_0^1 L \; d\theta = L$. Par caractérisation séquentielle, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = L$.