Oraux. Série n^{o}16. Convergence dominée et théorème ITT

Théorème d'intégration terme à terme

1) ($\clubsuit$) (*Mines*) Calculer $\int_0^1 \dfrac{\ln t}{t-1}\ dt$.

2) ($\clubsuit$) (*Mines*) Montrer que $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sqrt{t}}{e^t-1}\ dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-3/2}$.

Variante plus générale : $\forall \alpha > 0,\ \int_0^{+\infty} \dfrac{t^\alpha}{e^t-1}\ dt = \Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1)$, où $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

3) ($\clubsuit$) (*Mines*) a) Calculer $J = \int_0^{+\infty} \ln(\tanh x)\ dx$.

b) Calculer $\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{\operatorname{sh} x}\ dx$.

Théorème de convergence dominée

4) ($\clubsuit$) a) On admet $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ du = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(1+t^2)^n}\ dt$. Montrer : $I_n \sim \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.

b) Montrer que $I_n = 2n(I_n - I_{n+1})$. En déduire $I_{n+1} = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

c) Exprimer I_n à l'aide des intégrales de Wallis $W_m = \int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^m\ dt$.

5) ($\clubsuit$) *Preuve de Cesàro*. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue convergeant vers L en $+\infty$.

On considère $\forall x > 0,\ F(x) = \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\ dt$ valeur moyenne de f sur $[0, x]$.

Montrer que $F(x) = \int_0^x f(\theta x)\ d\theta$. En déduire avec soin que $\lim_{x\to+\infty}.F(x) = L$.

Remarque : S'applique aussi aux suites (version classique de Cesàro) en prenant f en escaliers.

Remarque : On pourrait généraliser le résultat aux $F(x) = \left(\int_0^x f(t)\ \omega(t)\ dt\right)\ /\left(\int_0^x \omega(t)\ dt\right)$, où $\omega > 0$.

En effet, on se ramène aux cas précédents en considérant $du = \omega(t)\ dt$, c'est-à-dire $u(t) = \int_0^t \omega$.