Oraux. Série n^{o}15. Indications

Séries, intégrales

1) Pour $x>0$, on a en $t=0$, $f(t)\sim t^{x-y}$, donc f intégrable ssi $x-y>-1$.

Pour $x=0$, f intégrable ssi $-y>-1$.

Pour $x<0$, $f(t)\sim -x\ln(t)t^{-y}$, donc f intégrable ssi $-y>-1$.

En conclusion, f est intégrable ssi ($x\geq 0$ et $y<x+1$) ou ($x<0$ et $y<1$).

2) $|\ln t|^\alpha = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ en $t=0$, $|\ln t|^\alpha \sim |1-t|^\alpha$ en $t=1$, et $(\ln t)^\alpha > \frac{1}{t}$ pour t assez grand.

Intégrales semi-convergentes

3) a) Pour $0<\alpha\leq 1$, utiliser une IPP. Pour le deuxième, utiliser $t=x^\alpha$. Pour le troisième, utiliser $t=\frac{1}{x}$.

b) $\ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}+\mathrm{o}_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) \sim -\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$.

c) En $+\infty$, utiliser un équivalent. En 0, utiliser le changement de variable $t=\frac{1}{x}$.

4) En 0^+ : On a $|f(x)| \leq \left(\int_x^1 \frac{t}{t^2}\,dt + \int_x^1 \frac{t}{t^2}\,dt\right) \sim \ln x$ lorsque $x\to 0$, donc $f(x)=O(\frac{1}{\sqrt{x}})$.

En $+\infty$: On a $\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}\,dt = -\frac{\cos x}{x^2} - 2\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t^3}\,dt$, d'où on déduit $f(x)=O_{+\infty}(\frac{1}{x^2})$.

Calculs d'intégrales

5) Se ramener au cas $\sigma=1$, puis procéder par IPP (et distinguer le cas n pair et n impair).

Pour intégrer par parties, utiliser $\int x\exp(-\frac{1}{2}x^2)\,dx = -\exp(-\frac{1}{2}x^2)+k$.

On peut aussi par le changement de variable $y=x^2$ se ramener au calcul de $\Gamma(n+\frac{1}{2})$.

6) a) Lorsque $a\neq b$, décomposer en élément simples. On obtient $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$ si $b\neq a$, et $\frac{1}{a}$ si $b=a$..

b) Utiliser $y=\frac{1}{x}$ après avoir justifié l'existence des intégrales.

c) Calcul de $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin]_{-1}^{+1} = \pi$.

Pour la seconde intégrale, utiliser $(b-x)(x-a) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - (x-\frac{a+b}{2})^2$ et un changement de variable affine.

e) Intégrer $1\times\frac{1}{(1+t^2)^n}$ par parties ; Intégrer $\frac{1}{(\mathrm{ch}\,t)^2}\times\frac{1}{(\mathrm{ch}\,t)^{n-2}}$ par parties, car $\tanh' t = 1-(\tanh t)^2 = \frac{1}{(\mathrm{ch}\,t)^2}$.

6) bis) a) $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \dfrac{1}{b}\left[\arctan\left(\dfrac{x-a}{b}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \dfrac{\pi}{b}$. Dans l'exemple, $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Montrer que $I=J$ en utilisantle changement de variable $y=\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ (cf aussi parité).

On a aussi $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^4+1}=0$.

Or, $x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$. Donc $I+J=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^4+1}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx = \pi\sqrt{2}$.

Propriétés générales des fonctions intégrables

7) a) $I(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1+a(\sin t)^2}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+au^2/(1+u^2)}\,\frac{du}{1+u^2} = \int_0^{+\infty}\frac{du}{1+a+u^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{a+1}}$.

b) Par a), $u_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{n^4+1}} = O(\frac{1}{n^2})$.

8) a) Pour tout $\varepsilon > 0$, on ne peut avoir $f(x) \geq \varepsilon$ pour x assez grand.

Autrement dit, on peut trouver des valeurs de x arbitrairement grandes pour lesquelles $0 \leq f(x) < \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe x_n tel que $x_n \geq n$ et $f(x_n) = \frac{1}{n+1}$ (on prend ici $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$).

On construit ainsi une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$.

Autre preuve : On a $\lim_{n\to+\infty} \int_n^{n+1} f = 0$. Or, par la formule de la moyenne, il existe x_n tel que $f(x_n) = \int_n^{n+1} f$.

b) Noter que $\forall t \geq x,\ f(x+h) \geq f(x) - kh$.

En considérant l'aire du triangle de hauteur $f(x)$ et de base $[x, x + \frac{f(x)}{2k}]$, montrer que $\frac{1}{2k} f(x)^2 \leq \int_x^{+\infty} f \to_{+\infty} 0$.

9) Même lorsque f' est positive, l'existence de $\int_a^{+\infty} f'$ n'implique pas la convergence de f' vers 0.

10) a) Utiliser $\int_{x/2}^{x} f(t)\ dt \geq \frac{1}{2} x f(x)$. Hypothèse nécessaire, car sinon, f ne cv pas toujours vers 0 en $+\infty$!

b) Non : il s'agit de prouver qu'il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que $f(x_n) > \varphi(x_n)$.

On minimise alors f en considérant une fonction en escaliers $f(t) = f(x_n)$ sur $]x_{n-1}, x_n]$.

Donc $\int_0^{+\infty} f(t)\ dt = \sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - x_{n-1}) f(x_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n f(x_n)$.

On choisit donc (x_n) de sorte que $x_n \varphi(x_n) \leq \frac{1}{n^2}$, et on prend $f(x_n) = 2\varphi(x_n)$.

Remarque : On peut approcher f en escaliers par des fonctions continues décroissantes (pour la norme L^1).

11) a) On note d'abord que Δ se prolonge par continuité en $x = 0$ par $\Delta(0) = f'(0)$.

On a alors $\int_0^x \Delta(t)^2\ dt = \left[-\dfrac{f(t)^2}{t} \right]_0^x + \int_\varepsilon^x \dfrac{2f(t)f'(t)}{t}\ dt$, d'où $\int_0^x \Delta(t)^2\ dt = -f(x)\Delta(x) + 2\int_0^x f(t)\Delta(t)\ dt$.

Comme $f(x)\Delta(x) \geq 0$, alors $\int_0^x \Delta(t)^2\ dt \leq \int_0^x f(t)\Delta(t)\ dt$. Conclure par comparaison et avec CS.

b) Par la formule de l'IPP, la fonction $\varphi(x) = f(x)\Delta(x)$ vérifie $\varphi'(x) = 2f(x)\Delta(x) - \Delta(x)^2$.

Donc φ' est intégrable, donc a foritori φ converge. La limite est nulle, car on ne peut avoir $f(x) \sim \lambda\sqrt{x}$.

Intégrales

12) a) $A + B = \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln(\frac{1}{2} \sin\theta)\ d\theta = \frac{1}{2} C - \frac{\pi}{2} \ln 2$, d'où $C = -\pi \ln 2$ et $A = B = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.

b) Noter que $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor M + \varphi(x \bmod \pi)$, où $M = \int_0^\pi \ln(2\sin t)\ dt$ et $\varphi(r) = \int_0^r \ln(2\sin t)\ dt$.

En $t = \pi + h$, on a $\ln(2\,|\sin t|) \sim \ln|h| = O(1/\sqrt{|h|})$, donc f est bien définie.

Pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$, on a $f'(x) = \ln(2\,|\sin x|)$, qui est π-périodique.

Pour prouver que f est périodique, il faut et il suffit de prouver que $M = 0$, c'est-à-dire $\int_0^\pi \ln(2\sin t)\ dt = 0$.

Or, par a), $f(\pi) = 0$.

12) bis) a) Utiliser $\int_{1/n}^1 f(t)\ dt + \frac{1}{n} f(1) \leq S_n \leq \int_0^1 f(t)\ dt$

b) On montre $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n}) = \frac{n}{2^{n-1}}$ en utilisant $\prod_{k=1}^{n-1} \left|1 - e^{2ik\pi/n}\right|$ et $\prod_{k=1}^{n-1} (x - e^{2ik\pi/n}) = \frac{x^n - 1}{x-1}$.

La ,propriété du a) s'étend aux fonctions décroissantes puis croissantes (doublement inpropres), quitte à couper l'intégrale en 2.

Donc $\int_0^\pi -\ln(\sin x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln(\sin(\frac{k\pi}{n})) = \ln 2$. Donc $J = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.