Oraux. Série n^{o}15. Intégrales impropres

Séries, intégrales

1) (♣) Donner une CNS sur $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pour que $f : t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t^x)}{t^y}$ est intégrable sur $]0,1]$.

2) (♣) (X) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Etudier l'intégrabilité de $f(t)=|\ln t|^\alpha$ sur $]0,\frac12]$, $[\frac12,1[$, $]1,2]$ et $[2,+\infty[$.

Intégrales semi-convergentes

3) (♣) a) Soit $\alpha\geq 0$. Etudier la convergence des intégrales : $\int_\pi^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$, $\int_0^{+\infty}\sin(x^\alpha)\,dx$ et $\int_0^1 x^{-\alpha}\sin\left(\dfrac1x\right)\,dx$.

b) Etudier la convergence des intégrales : $\int_1^{+\infty}\ln\left(\cos\left(\dfrac1x\right)\right)\,dx$ et $\int_0^{+\infty}\left(1-\cos\left(\dfrac1x\right)\right)\,dx$.

c) Etudier la convergence de $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sqrt{x}\sin(1/x^2)}{\ln(1+x)}\,dx$.

4) (♣) (*Mines*) On considère $f(x)=\int_x^{+\infty}\dfrac{\sin t}{t^2}\,dt$. Montrer que f est définie et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Calculs d'intégrales

5) (♣) (X) On donne $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2/2}\,dx=\sqrt{2\pi}$. Calculer les $J_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{+\infty}^{+\infty}x^n e^{-x^2/(2\sigma^2)}\,dx$.

6) (♣) a) Soient a et $b>0$. Calcul de $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

b) Montrer que $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2+1}\,dx=0$.

c) Calcul de $\int_{-1}^{+1}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\int_a^b\dfrac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$ (avec $a<b$).

d) Calcul de $\int_0^{+\infty}t^n e^{-\lambda t}\,dt$, $\int_0^1(-\ln t)^n\,dt$, $\int_0^1 t^\alpha\ln(t)\,dt$, avec $\alpha>-1$

e) Trouver des relations de récurrence (Wallis) pour $I_n=\int_0^{+\infty}\dfrac{dt}{(1+t^2)^n}$ et $J_n=\int_0^{+\infty}\dfrac{dt}{(\operatorname{ch} t)^n}$.

6) bis) a) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{(x-a)^2+b^2}$ où $b>0$. En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2-\sqrt2 x+1}=\pi\sqrt2$.

b) On pose $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^4+1}$ et $J=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2\,dx}{x^4+1}$. Montrer que $I=J$. Déduire de a) que $I=\dfrac{\pi\sqrt2}{2}$.

Propriétés générales des fonctions intégrables

7) (♣) *Exemple de fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$ de classe C^∞ ne convergeant pas vers 0 en $+\infty$.*

a) Pour $\lambda>0$, on pose $I(a)=\int_0^{\pi/2}\dfrac{dt}{1+a(\sin t)^2}\,dt$. Avec $u=\tan t$, montrer que $I(\lambda)=\dfrac{\pi}{2\sqrt{a+1}}$.

b) Montrer que $\int_0^{+\infty}\dfrac{dt}{1+t^4(\sin t)^2}$ converge. On posera $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\dfrac{dt}{1+t^4(\sin t)^2}\leq 2\int_{n\pi}^{n\pi+\pi/2}\dfrac{dt}{1+n^4(\sin t)^2}$.

8) (♣) Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue, positive et intégrable.

a) Montrer qu'il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=0$.

b) On suppose f lipschitzienne de rapport k. Montrer que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

9) (♣) (X) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

a) On suppose que f admet une limite en $+\infty$. A-t-on nécessairement $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$?

b) On suppose de plus que f est monotone. A-t-on nécessairement $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$?

10) (♣) (X) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, décroissante et intégrable sur $[0, +\infty[$.

a) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$. La propriété est-elle vraie si on suppose l'hypothèse "f décroissante" ?

b) Peut-on trouver une fonction φ strictement positive telle que $\varphi(x) = \mathfrak{o}_{+\infty}(\frac{1}{x})$ telle que pour toute fonction f décroissante et intégrable sur $[0, +\infty[$, on a $f(x) \leq \varphi(x)$ pour x assez grand ?

11) (★) (X) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$. On suppose $(f')^2$ intégrable sur $[0, +\infty[$.

a) Montrer que $\Delta : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est de carré intégrable sur $]0, +\infty[$, et que $\int_0^{+\infty} \Delta(x)^2\ dx \leq 4 \int_0^{+\infty} f'(x)^2\ dx$.

b) Montrer que $f(x)^2 = \mathfrak{o}_{+\infty}(x)$.

Intégrales

12) a) On pose $A = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\ dt$, $B = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\ dt$ et $C = \int_0^{\pi} \ln(\sin t)\ dt$.

Montrer que $A = B = \frac{1}{2}C$ et que $A + B = \frac{1}{2}C - \frac{\pi}{2}\ln 2$. En déduire A, B, C.

b) (♣) (X) On considère $f(x) = \int_0^x \ln(2\,|\sin t|)\ dt$. Montrer que f est bien définie, continue et périodique.

12) bis) a) (♣) (*Mines*) Soit $f :]0, 1] :\to \mathbb{R}$ une fonction positive intégrable. On pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$.

On suppose f décroissante. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(t)\ dt$.

b) (★) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n}) = \frac{n}{2^{n-1}}$. En déduire la valeur de $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\ dx$