Oraux. Série n^{o}14. Indications

Théorèmes de comparaisons

1) a) $u_n \sim \dfrac{a}{n}$, où $a = \ln x$; b) $u_n = (-1)^{n+1}\dfrac{3\pi}{8n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$; c) $\int \dfrac{1}{x\ln x \ln\ln x} = \ln(\ln(x)) + K$.

d) $u_n = (1-\frac{1}{n})^n \sim e^{-1}$ donc $\sum u_n$ diverge, et $v_n \sim \sqrt{e}e^{-n}$; e) $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$.

f) On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{a}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et utiliser le critère de Raabe-Duhamel. D'où CNS : $a > 1$.

Remarque : Une autre solution est d'utiliser (cf cv dominée) : $a(a+1)...(a+n) \sim n^a\ n!\ \Gamma(a)$.

g) On vérifie que $\frac{n!}{(n+p)!} \leq u_n \leq \frac{2n!}{(n+p)!}$ et $\frac{n!}{(n+p)!} \sim \frac{1}{n^p}$, d'où la CNS pour que $\sum u_n$ converge : $p \geq 2$.

2) a) Supposons $\alpha > 1$. Posons $\alpha > \beta > 1$. On a $a_n \geq \beta \ln n$ pour n assez grand. Donc $e^{-a_n} \leq \frac{1}{n^\beta}$.

b) On ne peut pas conclure : cf par exemple $a_n = \ln n + \beta\ln(\ln n)$: On a $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$.

3) $|u_n u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + u_{n+1}^2)$.

4) a) On a $a_n \leq K b_n$ avec $K = a_0/b_0$.

b) On suppose $L > 1$. Poser $b_n = n^{-\alpha}$ avec $1 < \alpha < L$. Justifier que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ pour n assez grand.

Séries alternées

5) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} - \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n \sim \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$. En déduire : $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

6) $(-1)^{n(n-1)/2}$ vaut 1 lorsque $n \equiv 0$ ou 1 modulo 4. Donc les $(-1)^{n(n-1)/2}$ valent $1, -1, -1, 1, -1, -1, ...$

Il suffit pour conclure de considérer la série comme somme des deux séries alternées $\sum a_{2k+1}$ et $\sum a_{2k}$.

Produits infinis

7) a) Les deux divergent lorsque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Alors $\ln(1+a_n) \sim a_n$.

b) On a $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. On a $\ln(1+a_n) = a_n - \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n \sim \frac{1}{2}a_n^2$. Et $\sum \varepsilon_n$ converge ssi $\sum a_n^2$ converge.

8) *Remarque* : La difficulté provient de l'absence (au programme) de fonction logarithme définie sur $\mathbb{C}^*$.

a) Posons $1 + z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$ avec $\rho_n \in \mathbb{R}_+$ et $\theta_n \in [-\pi, \pi[$. Par hypothèse, $\rho_n \neq 0$.

On considère $u_n = \ln \rho_n + i\theta_n$. Pour n assez grand, $1 + x_n > 0$, donc $\theta_n = \arctan(\frac{y_n}{1+x_n}) \to 0$.

b) Par Taylor-Lagrange sur $[0,1]$ à la fonction $\varphi : t \longmapsto \exp(tz)$, on a $|\exp(z) - 1 - z| \leq \frac{1}{2}|z|^2 \sup_{t\in[0,1]} \left|e^{tz}\right|$.

Ainsi, $|\exp(z) - 1 - z| \leq \frac{1}{2}|z|^2 \max(1, e^{\mathrm{Re}\, z})$, et a fortiori, $\exp(z) - (1+z) = O(|z|^2)$ lorsque $z \to 0$.

On a aussi a fortiori $e^z - 1 \sim z$ lorsque $z \to 0$.

c) On a $\prod_{k=0}^n (1+z_n) = \prod_{k=0}^n \exp(u_k) = \exp(\sum_{k=0}^n u_k)$. Il suffit donc de prouver que $\sum u_n$ converge.

Or, par b), $z_n - u_n = \exp(u_n) - 1 - u_n = O(|u_n|^2)$, qui est aussi en $O(|z_n|^2)$, car $u_n \sim z_n = (e^{u_n} - 1)$.

Donc $u_n = z_n + O(|z_n|^2)$, et on conclut compte tenu des hypothèses que $\sum u_n$ converge.

Etude d'une suite par une série

9) Avec $v_n = n^{-\alpha}u_n$, montrer que $\ln v_{n+1} - \ln v_n = O(n^{-2})$ et en déduire que $(\ln v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

10) On a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a$, donc $\sum u_n$ converge par le critère de D'Alembert.

En posant $v_n = a^{-n}u_n$, on obtient $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + O(u_n)$. En déduire que $(\ln v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\lambda > 0$.

11) Les cas $|a| < 1$ et $|a| > 1$ se déduisent du critère de D'Alembert.

Lorsque $a = 1$, montrer $u_n \sim \lambda n^b$ par le critère de Raabe-Duhamel.

Lorsque $a = -1$, montrer $u_n \sim \lambda(-1)^n n^{-b}$, et utiliser le critère spécial des séries alternées (lorsque $b > 0$).

12) *Première méthode* : Montrer que la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n^2} - (u_{n+1} - u_n)$ est majorée, donc converge.

Seconde méthode : Justifier l'existence de $\alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} u_k$. On a en particulier $\alpha_n \leq u_n$.

Commencer par justifier que $\forall n \geq 2$, $\forall k \geq n$, $u_k \leq u_n + \frac{1}{n-1}$.

Avec les notations de a), conclure en encadrant u_n à l'aide de α_n (et $\frac{1}{n-1}$).

13) Justifier d'abord que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, c'est-à-dire $[a, b]$ stable par $g = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + f)$.

Montrer que g est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{2}$. En déduire que $|x_{n+1} - x_n| \leq (\frac{1}{2})^n |x_1 - x_0|$

Donc $\sum(x_{n+1} - x_n)$ converge, d'où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi. Montrer pour finir que $l = \lim_{n\to+\infty} x_n$ est un pt fixe de f.

Comparaisons avec une intégrale

14) Posons $v_n = \dfrac{u_n}{S_n}$. On a $v_n = O(u_n)$, donc la propriété est immédiate si $\sum u_n$ converge.

Supposons $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. On a $v_n = \dfrac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = 1 - \dfrac{S_{n-1}}{S_n}$.

L'idée est de comparer $v_n = \dfrac{S_n - S_{n-1}}{S_n}$ et $\int_{S_{n-1}}^{S_n} \dfrac{dt}{t}$. On a en effet, $\int_{S_{n-1}}^{S_n} \dfrac{dt}{S_{n-1}} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \dfrac{dt}{t} \geq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \dfrac{dt}{S_n}$.

Autrement dit, $v_n = \dfrac{S_n - S_{n-1}}{S_n} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \dfrac{dt}{t} \leq \dfrac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = w_n$.

Or, $\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{S_{k-1}}^{S_k} \dfrac{dt}{t} = \int_{S_0}^{+\infty} \dfrac{dt}{t} = +\infty$. Donc $\sum w_n$ diverge.

Lorsque $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{S_{n-1}}{S_n} = 1$, on a $v_n \sim w_n$, donc $\sum v_n$ diverge. Si $\left(\dfrac{S_{n-1}}{S_n}\right)$ ne tend pas vers 1, $\sum v_n$ diverge.

Remarque : De même, dans les fonctions, $\int \dfrac{F'}{F} = \ln F(x) + c$. On pourrait d'ailleurs se ramener au cas continu en considérant une fonction affine par morceaux (primitive de la fonction en escaliers associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Pour la variante : $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha} = \dfrac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \dfrac{dt}{t^\alpha}$ et $\dfrac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}^\alpha} \geq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \dfrac{dt}{t^\alpha}$. On a $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{S_{n-1}}^{S_n} \dfrac{dt}{t^\alpha} = \int_{S_0}^{S} \dfrac{dt}{t^\alpha}$.

Si $\left(\dfrac{S_{n-1}}{S_n}\right)$ tend vers 1, alors $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ est de même nature que $\int_{S_0}^{S} \dfrac{dt}{t^\alpha}$, donc converge ssi $S < +\infty$ ou $\alpha > 1$.

Si $\left(\dfrac{S_{n-1}}{S_n}\right)$ ne tend pas vers 1, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 : les deux séries $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ et $\sum u_n$ divergent.

Regroupement de termes

15) a) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

b) $\frac{1}{2} n u_n \leq \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n} u_k \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

On peut aussi invoquer le résultat analogue sur les fonctions (et prendre la fonction en escaliers associée).

c) *Exemple* : $u_n = \frac{1}{n}$ si n carré entier, $u_n = 0$ sinon. *Variante* : exemple du a)

16) Se ramener à $F(2x) \leq (1 + \frac{1}{x})F(x)$, où $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ croissante et $F(0) = 0$.

On a alors $\lim_{+\infty} F \leq F(1)\prod_{n=0}^{+\infty}(1+2^{-n}) \leq F(1)\exp(\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}) = F(1)e^2 < +\infty$.

17) a) On a $\dfrac{2p+1}{p^2+2p} \leq S_p \leq \dfrac{2p+1}{p^2}$, d'où on déduit $S_p = \dfrac{2}{p} + O\left(\dfrac{1}{p^2}\right)$. Donc $\sum(-1)^p S_p$ converge.

b) On a $\lfloor\sqrt{n}\rfloor = p$ ssi $p^2 \leq n < (p+1)^2$. On pose $S_p = \sum_{n=p^2}^{p^2+2p} \dfrac{1}{n}$.

On pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}}{k}$. On a T_n compris entre $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k S_k$ et $\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k S_k$, où $p = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

Transformée d'Abel

18) b) On utilise $\sum_{k=0}^{n} a_k u_k = u_n A_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k(u_{k+1} - u_k)$.

$\sum A_n(u_{n+1} - u_n)$ converge absolument car en $O(u_{n+1} - u_n)$ et $\sum |u_{n+1} - u_n| = \sum(u_n - u_{n+1})$ converge.

c) Vérifier que si $\theta \neq 0$ modulo 2π, $\sum e^{in\theta}$ est bornée (par $\frac{1}{|e^{i\theta}-1|}$).

19) Le cas $z = 1$ est traité au 17).

Lorsque $z \neq 1$, Utiliser 18) en posant $a_n = \dfrac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ et $u_n = z^n$.