

Oraux. Série n°14. Séries.

Théorèmes de comparaisons

1) (♣) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ (et $\sum v_n$) dans les cas suivants.

a) (X) $u_n = x^{1/n} - 1$, où $x > 0$; b) (X) $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1})$; c) (Mines) $u_n = \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$

d) $u_n = (1 - \frac{1}{n})^n$ et $v_n = (1 - \frac{1}{n})^{(n^2)}$; e) $u_n = n^{-\exp(1/n)}$ et $v_n = (-1)^n u_n$

f) (Mines) $u_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}$; g) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k!}{(n+p)!}$, où $p \in \mathbb{N}$.

2) (♣) (X ESPCI) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $a_n \sim \alpha \ln n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, avec $\alpha > 0$.

a) Montrer que la série de terme général $\exp(-a_n)$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.

b) Peut-on conclure si $\alpha = 1$?

3) (♣) Montrer que si $\sum u_n^2$ converge, alors $\sum u_n u_{n+1}$ converge.

4) (♣) a) (ENS) Soient a et b deux suites réelles strictement positives telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$.

Montrer que si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.

b) On suppose $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = -L$, avec $L \geq 0$.

Montrer que $\sum a_n$ converge si $L > 1$, alors $\sum a_n$ diverge si $L < 1$, Que dire si $L = 1$?

Séries alternées

5) (♣) Soit $\alpha > 0$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$.

6) (♣) (X) Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{n}$.

Produits infinis

7) (♣) On suppose $a_n \neq -1$. On dit que $\prod_{n \in \mathbb{N}} (1 + a_n)$ converge ssi la limite existe (dans $\mathbb{R}$) et n'est pas nulle.

a) On suppose $a_n \geq 0$. Montrer que $\prod_{n \in \mathbb{N}} (1 + a_n)$ converge ssi $\sum a_n$ converge.

b) On suppose $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelle telle que $\sum a_n$ converge. Montrer que $\prod_{n \in \mathbb{N}} (1 + a_n)$ converge ssi $\sum a_n^2$ converge.

8) (♣) On suppose $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite complexe telle que $z_n \neq -1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$.

a) Montrer qu'il existe une suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $1 + z_n = e^{u_n}$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

b) Montrer que $e^{-z}(1+z) = O(|z|^2)$ lorsque $z \rightarrow 0$.

c) On suppose que $\sum z_n$ et $\sum |z_n|^2$ convergent. Montrer que $\prod_{n \in \mathbb{N}} (1 + z_n)$ converge.

Etude d'une suite par une série

9) (♣) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})$.

Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \lambda n^\alpha$.

Remarque : On en déduit que $\sum u_n$ converge ssi $\alpha < -1$ (critère de Raabe-Duhamel).

Indication : Avec $v_n = n^{-\alpha} u_n$, montrer que $\ln v_{n+1} - \ln v_n = O(n^{-2})$ et en déduire que $(\ln v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Montrer que $\sum u_n$ converge et qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \lambda a^n$.

Indication : Montrer avec D'Alembert que $\sum u_n$ converge. Poser $v_n = a^{-n}u_n$ et utiliser $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + O(u_n)$.

11) (♣) (Mines) Soient a et b réels. Soit $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^*$ telle que $\varphi(x) = a + \frac{b}{x} + O_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Donner une CNS sur a et b pour que la série de terme général $u_n = \prod_{k=1}^n \varphi(k)$ converge.

Indication : Traiter les cas $|a| < 1$ et $|a| > 1$. Lorsque $a = 1$, montrer $u_n \sim \lambda n^b$.

Lorsque $a = -1$, montrer $u_n \sim \lambda(-1)^n n^{-b}$ et pour $b < 0$, $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante à partir d'un certain rang.

12) (★) (X) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelle positive vérifiant $u_{n+1} \leq u_n + \frac{1}{n^2}$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Remarque : La propriété serait évidente si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ était supposée croissante ... (car $\sum \frac{1}{n^2}$ converge).

13) (♣) (Mines) Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une application 1-lipschitzienne.

On considère $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in [a, b]$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$.

Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et converge vers un point fixe de f .

Comparaisons avec une intégrale

14) a) (♣) (Mines) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Montrer que les séries $\sum \frac{u_n}{S_n}$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

Indication : Comparer $\frac{u_n}{S_n}$ et $\frac{u_n}{S_{n-1}}$ avec $\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t}$, où $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Considérer le cas où $S_{n-1} \sim S_n$.

Variante : Soit $\alpha > 0$. Etudier la convergence de $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ selon la nature de $\sum u_n$.

Regroupement de termes

15) (♣) a) (Centrale) $u_n = \frac{1}{n}$ si n est un carré entier, et $u_n = \frac{1}{n^2}$ sinon. La série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

b) (X) Si $\sum u_n$ converge et si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = 0$.

c) Donner un contre-exemple si on ne suppose pas $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante.

16) (★) (X-ESPCI) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$.

Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

17) (♣) a) On pose $S_p = \sum_{k=p^2}^{p^2+2p} \frac{1}{k}$. Montrer que $S_p = \frac{2}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$. En déduire la nature de $\sum (-1)^p S_p$.

b) (ENS) Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$ converge.

Transformée d'Abel

18) (♣) a) Soit f et $g : [a, +\infty[$ continues, avec $F = \int_a^x f(t) dt$ bornée et g décroissante et convergeant vers 0.

Montrer que $\int_a^{+\infty} fg$ converge. *Exemple* : $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

b) *Transformée d'Abel* : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On pose $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

On suppose $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante et convergeant vers 0, alors $\sum u_n A_n$ converge.

c) *Exemple* : On suppose $\theta \neq 0$ modulo 2π . Montrer que $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge.

19) (★) (ENS) Montrer que pour tout $z \in U$, la série $\sum (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} z^n$ converge.