Oraux. Série n°13. Indications

Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

1) a) L'intervalle $]0,+\infty[$ est stable par $f : x \longmapsto xg(x)$ et on a $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x) \leq x$.

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0, unique point fixe de f.

b) On a $f(x) = x(1-\lambda x + \mathfrak{o}(x)) = x - \lambda x^2 + \mathfrak{o}(x^2)$, et par composition, $u_{n+1} = u_n - \lambda u_n^2 + \mathfrak{o}(u_n^2)$.
On a donc $\dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{u_n - \lambda u_n^2 + \mathfrak{o}(u_n^2)} = \dfrac{1+\lambda u_n + \mathfrak{o}(u_n)}{u_n} = \dfrac{1}{u_n} + \lambda + \mathfrak{o}(1)$.
Donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}\right) = \lambda$, et par Cesàro, $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{nu_n} = \lambda$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{u_n} \sim n\lambda$.
2) L'intervalle $J = [\cos(1), 1]$ est stable par cos, car $\cos(J) \subset [\cos(1), \cos(\cos(1))] \subset J$.

On a $u_n \in [\cos(1), 1] = J$ et cos est k-contractante sur J, où $k = \sin(\cos 1) < 1$.

L'application $x \longmapsto \cos x$ admet sur J un point fixe $c \in J$. Donc $|u_n - c| \leq k^n |u_0 - c| \to 0$.

3) a) On considère k vérifiant $|f'(0)| < k < 1$. Il existe $\alpha < 0$ tel que $\forall x \in [-\alpha, \alpha]$, $|f(x)| < k|x|$

en déduire que pour tout $u_0 \in [-\alpha,\alpha]$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Ainsi $[-\alpha, \alpha] \subset V$.

b) Soit $x \in V$. Posons $u_{n+1}(x) = f(u_n(x))$. On a $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$.

Donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n(x) \in]-\alpha, \alpha[$.

Par continuité de u_n (composée de n fonctions continues), on a $u_n(y) \in]-\alpha,\alpha[$ pour y assez proche de x.

Donc pour y assez proche de x, $\lim_{n\to+\infty} u_n(y) = 0$, et $y \in V$. Donc V est un ouvert.

Suites définies implicitement

4) a) On pose $f_n(x) = x^5 + nx - n$. On a $f_n'(x) = 5x^4 + n > 0$, donc f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

D'où l'existence et l'unicité de x_n.

b) On note que $\lim_{n\to+\infty} f_n(1-\varepsilon) < 0$ et que $f_n(1) > 0$.

Donc $1 - \varepsilon \leq x_n < 1$ pour n assez grand. Donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.

c) Posons $x_n = 1 - \varepsilon_n$. On a $(1+\varepsilon_n)^5 = n\varepsilon_n$, donc $\varepsilon_n \sim \frac{1}{n}$. Donc $x_n = 1 - \frac{1}{n} + \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

5) a) Il suffit de vérifier que P change de signe entre $-\infty$, 0, 1, $+\infty$. On conclut avec $\deg P = 3$.

b) Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $P(-\varepsilon)P(0) < 0$ pour t assez grand, donc $a(t) \in]-\varepsilon, 0[$ pour t assez grand.

D'où $\lim_{t\to+\infty} a(t) = 0^-$. Avec $\varepsilon \in]0,1[$ et $P(1-\varepsilon)P(1)$, on montre de même que $\lim_{t\to+\infty} b(t) = 1$.

On a $a(t) + b(t) + c(t) = t + 3$ par les relations entre coeff et racines, d'où $c(t) = t + 2 + \mathfrak{o}_{+\infty}(1)$.