

Oraux. Série n°13. Suites et fonctions définies implicitement

Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

1) (♣) (X) Soit $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $g(0) = 1$, et $\forall x \in [0, +\infty[, g(x) > 0$ et $g'(x) \leq 0$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n g(u_n)$.

a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$.

b) Montrer que $u_{n+1} = u_n - \lambda u_n^2 + o(u_n^2)$, avec $\lambda = -g'(0)$. En déduire avec Cesàro que $\frac{1}{u_n} \sim n\lambda$.

2) (♣) (X) On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(u_n)$.

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

3) (♣) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $|f'(0)| < 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0(x) = x$ et $u_{n+1}(x) = f(u_n(x))$.

On définit le bassin d'attraction V de 0 par $V = \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0\}$

a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $[-\alpha, \alpha] \subset V$.

b) Montrer que V est un ouvert. *Indication* : Utiliser la continuité des $x \mapsto u_n(x)$.

Suites définies implicitement

4) (♣) (X) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^5 + nx = n$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution x_n .

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

c) Donner un développement asymptotique à deux termes de x_n .

5) (♣) On considère $P(x) = x^3 - 3x^2 + 1 + t(x - x^2)$.

a) Montrer que P admet trois racines réelles $a(t), b(t), c(t)$ vérifiant $a(t) < 0 < b(t) < 1 < c(t)$.

b) Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} b(t) = 1$ et $c(t) = t + 2 + o_{+\infty}(1)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Solution : a) Il suffit de vérifier que P change de signe entre $-\infty, 0, 1, +\infty$. On conclut avec $\deg P = 3$.

b) Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $P(-\varepsilon)P(0) < 0$ pour t assez grand, donc $a(t) \in]-\varepsilon, 0[$ pour t assez grand.

D'où $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = 0^-$. Avec $\varepsilon \in]0, 1[$ et $P(1 - \varepsilon)P(1)$, on montre de même que $\lim_{t \rightarrow +\infty} b(t) = 1$.

On a $a(t) + b(t) + c(t) = t + 3$ par les relations entre coeff et racines, d'où $c(t) = t + 2 + o_{+\infty}(1)$.

6) (♣) (Centrale) On considère $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$. On rappelle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\ln(1 - x)$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution $x_n \geq 0$.

b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1 - e^{-1}$.