Oraux. Série n°12. Indications

Théorème de Cesàro

1) a) On a $\lim_{n\to+\infty}(\ln u_{n+1}-\ln u_n)=\ln\lambda$, donc par Cesaro, $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\ln u_n=\ln\lambda$.

En composant par la fonction continue exp, on obtient : $\lim_{n\to+\infty}(u_n)^{1/n}=\lambda$.

b) On pose $u_n=\frac{n^n}{n!}$. On a $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$. Donc $L=e$.

Remarque : On peut retrouver le résultat si on connaît la formule de Stirling : $n!\sim\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n}$.

2) a) On se ramène au cas $L=0$ en traitant d'abord le cas $u_n=L$, et par linéarité (de $u\longmapsto v$).

Lorsque $u_n=L$, on a $\lim_{n\to+\infty}v_n=2L$, car $\sum_{k=1}^n 2^k=2(2^n-1)$.

On suppose $L=0$. Soit $\varepsilon>0$. Il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq p$, $|u_n|\leq\varepsilon$.

On coupe la somme en 2 : On a $\forall n\geq p$, $|v_n|\leq 2^{-n}A+2\varepsilon$, avec $A=\sum_{k=1}^p 2^ku_k$ et sachant que $\sum_{k=1}^n 2^k\leq 2.2^n$

Pour n assez grand, $2^{-n}A\leq\varepsilon$, donc $\forall n\geq p$, $|v_n|\leq 3\varepsilon$. Comme $\varepsilon>0$ est arbitraire, $\lim_{n\to+\infty}v_n=0$.

3) Pour $x\in[2^n,2^{n+1}]$, on a $\dfrac{f(x)}{x}=\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{2^k}\dfrac{f(x/2^{k-1})-f(x/2^k)}{x/2^k}+\dfrac{f(x/2^n)}{x}$, et $|f(x/2^n)|\leq\sup_{[1,2]}|f|$.

4) Ecrire $a_n=a+\alpha_n$ et $b_n=b+\beta_n$, avec $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\beta_n=0$.
On a $|u_n-ab|\leq\dfrac{|b|}{n+1}\sum_{k=0}^n|\alpha_k|+\dfrac{|a|}{n+1}\sum_{k=0}^n|\beta_k|+\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n(\alpha_k^2+\beta_k^2)$. Conclure avec Cesaro.

5) On pose $u_n=x_n+\frac{1}{2}x_{n+1}$ et $x_n=(-2)^ny_n$. On obtient $y_n-y_{n+1}=(-\frac{1}{2})^nu_n$.

Commelim$_{n\to+\infty}y_n=0$, alors $y_n=\sum_{k=n}^{+\infty}(y_k-y_{k+1})=\sum_{k=n}^{+\infty}(-\frac{1}{2})^ku_k$, donc $x_n=\sum_{k=0}^{+\infty}(-\frac{1}{2})^ku_{k+n}$.

Posons $u_n=1+r_n$, avec $\lim_{n\to+\infty}r_n=1$.

Il existe m tel que $\forall k\geq m$, $|r_k|\leq\varepsilon$, donc $\forall n\geq m$, $\left|\sum_{k=0}^{+\infty}(-\frac{1}{2})^kr_{k+n}\right|\leq\varepsilon\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{1}{2})^k=2\varepsilon$.

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}x_n=\sum_{k=0}^{+\infty}(-\frac{1}{2})^k=\frac{2}{3}$.

Etude de la convergence

6) α_n minore $\{u_k,k\geq n+1\}$, donc $\alpha_n\leq\alpha_{n+1}$. De même $\beta_n\geq\beta_{n+1}$.

On a aussi $\beta_n\leq u_n\leq\alpha_n$. Les suites sont bornées car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Donc $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Si $\alpha=\beta$, alors par pincement, $\lim_{n\to+\infty}u_n=\alpha=\beta$.

Réciproquement, supposons que $\lim_{n\to+\infty}u_n=L$.

Soit $\varepsilon>0$. Pour n assez grand, $u_n\in[L-\varepsilon,L+\varepsilon]$, donc pour n assez grandm, $L-\varepsilon\leq\beta_n\leq\alpha_n\leq L+\varepsilon$.

On en déduit que $\alpha=\beta=L$.

7) a) Utiliser $u_0=1$ et $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$.

b) Exprimer u_n en fonction du terme $v_n=\sqrt{1+\sqrt{1+...+\sqrt{1}}}$ étudié au a).

c) Noter que s'il existe $\lambda>0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n\leq\lambda^{(2^n)}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Noter que s'il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $a_p\geq\lambda^{(2^p)}$, alors $\forall n\geq p$, $u_n\geq\lambda$.

Solution : a) On a $u_0=1$ et $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}=f(u_n)$, avec $f(x)=\sqrt{1+x}$.

La fonction f admet sur $[0,+\infty[$ l'unique point fixe $L=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On a $\forall x\in[0,L]$, $x\leq f(x)\leq L$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers L.

b) On a $u_n = \lambda\sqrt{1+\sqrt{1+...+\sqrt{1}}}$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lambda L$, où L est définie au a).

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, car $x \longmapsto \sqrt{a_1+\sqrt{a_2+...+\sqrt{a_n+x}}}$ est une fonction croissante de x.

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ssi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

- S'il existe λ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leq \lambda^{(2^n)}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par la suite du b), donc est majorée.

- Sinon, pour tout λ, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $a_p \geq \lambda^{(2^p)}$, donc $\forall n \geq p$, $u_n \geq (a_p)^{1/2^p} = \lambda$.

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

Or, $a_n \leq \lambda^{(2^n)}$ équivaut à $\ln a_n \leq 2^n(\ln\lambda)$. Donc il existe λ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leq \lambda^{(2^n)}$ ssi $\ln a_n = O(2^n)$, car une suite majorée à partir d'un certain rang est majorée.

Comparaisons entre sommes et intégrales

8) On utilise la comparaison entre sommes et intégrales, ou bien les sommes de Riemann :

- On a $\int_{n+1}^{pn+1} \dfrac{dt}{t} \leq u_n \leq \int_n^{pn} \dfrac{dt}{t}$, c'est-à-dire $\ln(\frac{pn+1}{n+1}) \leq u_n \leq \ln(p)$, et par pincement, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln p$.
- On a $u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{pn} \dfrac{1}{k/n} = \int_1^p \dfrac{dt}{t}$, car $\frac{k}{n}$ décrit une subdivision régulière de $[1,p]$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln p$.

9) Par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$;

Dans les deux derniers cas, comparer avec une intégrale :

$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int_0^{\operatorname{arg\,sh} 1} dt = \operatorname{arg\,sh} 1 = \ln(1+\sqrt{2})$ et $w_n \leq \int_0^n \frac{dt}{\sqrt{n^2+t^3}} \leq \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1+nu^3}} \to 0$ (cv dominée).