Oraux. Série n^{o}12. Suites réelles

Théorème de Cesàro

1) ($\clubsuit$) (*X-ESPCI*)

a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive.

On suppose qu'il existe $\lambda = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 0$. Montrer (avec Cesaro) que $\lim_{n\to+\infty}(u_n)^{1/n} = \lambda$.

b) Déterminer $L = \lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^n}{n!}\right)^{1/n}$.

Remarque : On peut retrouver le résultat si on connaît la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$.

2) *Variante du théorème de Césaro*

($\clubsuit$) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers L. On pose $v_n = 2^{-n}\sum_{k=1}^n 2^k u_k$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

Remarque : La valeur moyenne $\left(\sum_{k=1}^n 2^k u_k\right) / \left(\sum_{k=1}^n 2^k\right)$ tend vers L, ce qui permet de deviner le résultat.

3) ($\clubsuit$) (*Mines*) Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue, telle que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(2x)-f(x)}{x} = 0$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

4) ($\clubsuit$) (*X-ESPCI*) On suppose $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$.

On pose $u_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

5) ($\clubsuit$) (*X*) *Exemple de suites définies par une récurrence linéaire.*

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée telle que $\lim_{n\to+\infty}\left(x_n + \dfrac{1}{2}x_{n+1}\right) = 1$.

Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer $L = \lim_{n\to+\infty} x_n$.

Remarque : On peut noter que si L existe, on a nécessairement $L + \frac{1}{2}L = 1$, c'est-à-dire $L = \frac{2}{3}$.

Indication : On pose $u_n = x_n + \dfrac{1}{2}x_{n+1}$. En posant $x_n = (-2)^n y_n$, calculer x_n en fonction des u_k, avec $k \geq n$.
On obtient $x_n = \sum_{k=0}^{+\infty}(-\frac{1}{2})^k u_{k+n}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} x_n = \sum_{k=0}^{+\infty}(-\frac{1}{2})^k = \frac{2}{3}$. On pourra poser $u_n = 1 + r_n$.

Etude de la convergence

6) ($\clubsuit$) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On pose $\alpha_n = \inf\{u_k, k\geq n\}$ et $\beta_n = \sup\{u_k, k \geq n\}$.

Montrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones (préciser leur monotonie) et convergentes.

On note α et β leurs limites (appelée limite inférieure et limite supérieure).

Montrer brièvement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $\alpha = \beta$.

7) ($\clubsuit$) (*X-ESPCI*) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + ... + \sqrt{a_n}}}$.

a) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1$. Déterminer $L = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

b) Soit $\lambda > 0$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \lambda^{(2^n)}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

c) Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ssi $\ln a_n = O(2^n)$.

Comparaisons entre sommes et intégrales

8) ($\clubsuit$) (*X-ESPCI*) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.Déterminer $L = \lim_{n\to+\infty} u_n$, où $u_n = \sum_{k=n+1}^{pn} \dfrac{1}{k}$.

Indication : On utilise la comparaison entre sommes et intégrales, ou bien les sommes de Riemann :

- On a $\int_{n+1}^{pn+1} \dfrac{dt}{t} \leq u_n \leq \int_{n}^{pn} \dfrac{dt}{t}$, c'est-à-dire $\ln(\frac{pn+1}{n+1}) \leq u_n \leq \ln(p)$, et par pincement, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln p$.
- On a $u_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{pn} \dfrac{1}{k/n} = \int_1^p \dfrac{dt}{t}$, car $\frac{k}{n}$ décrit une subdivision régulière de $[1, p]$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln p$.

9) ($\clubsuit$) (X) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$, $v_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$ et $w_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k^3}}$.

Déterminer les limites des suites de termes généraux u_n, v_n et w_n.