Oraux. Série n°11. Indications

1) Se ramener à $\left(1+\dfrac{\lambda}{n}+\mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$ en utilisant un $DL_1(0)$ de $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+h\right)$.

Solution : $\dfrac{(n+1)\pi}{3n}=\dfrac{\pi}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3n}$.

Par Taylor-Young, $\cos(\frac{\pi}{3}+h)=\cos(\frac{\pi}{3})-h\sin(\frac{\pi}{3})+\mathfrak{o}\left(h\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}h+\mathfrak{o}\left(h\right)$.

Donc $2\cos\left(\dfrac{(n+1)\pi}{3n}\right)=2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\pi}{3n}+\mathfrak{o}_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)=1-\dfrac{\pi}{\sqrt{3}n}+\mathfrak{o}_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{\lambda}{n}\right)^n=e^{\lambda}$, alors $L=e^{-\pi/\sqrt{3}}$.

2) $\sin(\pi\sqrt{1+n^2})=\sin(n\pi+\frac{\pi}{2n}+\mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right))=\frac{(-1)^n\pi}{2n}+\mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $\frac{1}{\sin(\pi\sqrt{1+n^2})}\sim\frac{(-1)^n 2n}{\pi}$.

En déduire $L=e^{2/\pi}$.

3) Avec $x=\frac{\pi}{2}-h$, on a $f(x)=(\cos h)^{1/\sin(h)}=...=\exp\left(-\frac{1}{2}h+\mathfrak{o}\left(h\right)\right)=1$.

4) Montrer d'abord que $x^{1/x}=1+\frac{1}{x}\ln x+\mathfrak{o}_{+\infty}(\frac{1}{x}\ln x)$, et en déduire $(x^{x^{1/x}}-x)\sim(\ln x)^2$.

5) a) Avec $M=\max(a,b)$, on a $\dfrac{M}{2^{1/x}}\leq\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}\leq M$, donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=M$.

b) $a^x=e^{x\ln a}=1+x\ln a+\mathfrak{o}\left(x\right)$, donc $\dfrac{a^x+b^x}{2}=1+x\ln\sqrt{ab}+\mathfrak{o}\left(x\right)$. En déduire $\lim_{x\to0,x>0}f(x)=\sqrt{ab}$.

6) a) Il existe $x_0\in[a,b]$ tel que $f(x_0)=M$.

Par continuité de f en x_0, on a $M-\varepsilon\leq f(x)\leq M$ sur un voisinage $[a,b]$de x_0.

Remarque : Si $x_0\notin\{0,1\}$, on peut choisir $[a,b]=[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$ pour $\alpha>0$ assez petit.

Si $x_0=0$, on peut choisir $[a,b]=[x_0,x_0+\alpha]$ pour $\alpha>0$ assez petit.

b) On suppose $M>0$ (sinon f est identiquement nulle)

Soit $\varepsilon\in]0,M[$. Par a), il existe $[a,b]\subset[0,1]$ tel que $a<b$ et $\forall x\in[a,b]$, $M-\varepsilon\leq f(x)\leq M$.

Par Chasles et par positivé de f, on a $(b-a)(M-\varepsilon)^n\leq u_n\leq M^n$. Donc $(b-a)^{1/n}(M-\varepsilon)\leq(u_n)^{1/n}\leq M$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}(b-a)^{1/n}(M-\varepsilon)=(M-\varepsilon)>(M-2\varepsilon)$, alors $(M-2\varepsilon)\leq(u_n)^{1/n}\leq M$ pour n assez grand.

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}(u_n)^{1/n}=M$.