Oraux. Série n^{o}11. Développements limités

1) ($\clubsuit$) (X) Déterminer $L = \lim_{n\to+\infty}\left(2\cos\left(\dfrac{(n+1)\pi}{3n}\right)\right)^n$.

2) ($\clubsuit$) (X) On pose $u_n = \left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{1/\sin(\pi\sqrt{1+n^2})}$. Déterminer $L = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

3) ($\clubsuit$) (X) Déterminer la limite L en $(\frac{\pi}{2})^-$ de $f(x) = (\sin x)^{1/\cos(x)}$.

4) ($\clubsuit$) (*inspiré* X) Déterminer la limite L en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{x^{x^{1/x}} - x}{\ln(x+1)^2}$.

5) ($\clubsuit$) a) (X) Soient $a > 0$ et $b > 0$. On pose $f(x) = \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$.

a) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Déterminer $\lim_{x\to 0, x>0} f(x)$.

6) ($\clubsuit$) a) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. On pose $M = \sup_{x\in[0,1]} f(x)$.

b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $[a,b] \subset [0,1]$ tel que $a < b$ et $\forall x \in [a,b]$, $M - \varepsilon \leq f(x) \leq M$.

On pose $u_n = \int_0^1 f(t)^n dt$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(u_n)^{1/n} = M$.