

Oraux. Série n°10. Indications

Comparaisons des normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$

1) Cauchy-Schwarz : $|\sum_{i=1}^n a_i x_i| \leq \|a\|_2 \|x\|_2$, avec égalité si a et x colinéaires

$|\sum_{i=1}^n a_i x_i| \leq \|a\|_1 \|x\|_\infty$, avec égalité par exemple lorsque $x_i = 1$ si $a_i \geq 0$ et -1 sinon.

$|\sum_{i=1}^n a_i x_i| \leq \|a\|_\infty \|x\|_1$, avec égalité tous les x_i sont nuls sauf un correspondant à $|a_i|$ maximal.

Parties convexes et espaces vectoriels normés

2) a) *Existence* : $\varphi : y \mapsto \|x - y\|$ est continue (1-lipschitzienne) et atteint son minimum sur le compact K .

Unicité : Si y et z distincts convenaient, alors $m = \frac{1}{2}(y + z)$ vérifierait $\|x - m\| < \|x - y\| = \|x - z\|$.

b) Notons L l'intersection des demi-plans qui contiennent K . Alors L contient K .

Réciproquement, soit x n'appartenant pas à K . On considère $y \in K$ comme au a) et le demi-plan P contenant y et délimité par la médiatrice de $[x, y]$. Comme K est convexe, on vérifie que $K \subset P$, donc $x \notin L$.

Normes

3) Le système $ax + by = cx + dy = 0$ implique $(x, y) = (0, 0)$ ssi $ad - bc \neq 0$.

Dans ce cas, N est une norme et la boule unité est un parallélogramme de centre O .

4) CNS : $p \geq n$ de sorte que $N(P) = 0 \Rightarrow P = 0$.

5) CNS : $\sum a_n$ série à termes strictement positifs et convergente.

6) a) Etudier la fonction $u \mapsto uv - \frac{1}{p}u^p$; prendre $u = x_i / \|x\|_p$ et $v = y_i / \|y\|_q$.

b) La seule difficulté est de prouver l'inégalité triangulaire $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Noter que par a), $\sum_{i=1}^n |x_i| (|x_i + y_i|)^{p-1} \leq \|x\|_p (\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p)^{1/q} = \|x\|_p \|x + y\|_p^{p/q}$, car $p - 1 = \frac{p}{q}$.

En déduire que $\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{p/q}$, et conclure.

c) Pour $\|y\|_q \leq 1$, on a $\langle x, y \rangle \leq \|x\|_p$ par a), avec égalité pour $|x_i y_i| = \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^{p-1}}$ (on a bien $\|y\|_q = 1$).

Ouverts et fermés

7) a) On peut considérer la norme euclidienne. L'image de $B((x_0, y_0), \varepsilon)$ est $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$.

b) Contre-exemple : Considérer $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$.

Compacité

8) a) Supposons $f(a) < f(c) < f(b)$. Considérer des chemins d'intérieurs disjoints reliant a et b .

b) Posons $A = \{x \mid f(x) \leq c\}$ et $B = \{x \mid f(x) \geq c\}$. Supposer à la fois K et L non bornées.

En considérant des chemins bien choisis, en déduire que $\{x \mid f(x) = c\}$ n'est pas borné.