Oraux. Série n°10. Espaces vectoriels normés.

Comparaisons des normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$

1) (♣) On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\| \ \|$. Soient $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$.

On considère la forme linéaire $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad x = (x_1, ..., x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i$.

On pose $\lambda = \sup_{x \in S} |\varphi(x)|$. Déterminer λ pour $\| \ \|_2$, $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$. Donner des cas d'égalité.

Parties convexes et espaces vectoriels normés

2) (♣) a) Soit K un convexe compact de plan $\mathbb{R}^2$ euclidien.

Montrer que pour tout point $x \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique $y \in K$ tel que $d(x, K) = \|x - y\|$.

b) Montrer que tout convexe compact du plan est intersection des demi-plans qui le contiennent.

Remarque : En fait, on pourrait supposer K convexe fermé (on peut se ramener au cas compact).

Normes

3) (♣) (*Centrale*) Soient des réels a, b, c, d.

a) Donner une CNS que a, b, c, d pour que $N(x, y) = \max(|ax + by|, |cx + dy|)$ soit une norme sur le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^2$.

b) Dans ce cas, que peut-on dire de la boule unité ?

4) (♣) (*Mines*) Soient $x_0, x_1, ..., x_p$ des réels distincts.

Donner une CNS sur n et p pour que $N(P) = \sum_{k=0}^p |P(x_k)|$ définisse une norme sur $E = \mathbb{R}_n[X]$.

5) (♣) On considère E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites bornées $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Donner une CNS sur $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour que $N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n |u_n|$ soit une norme sur E.

6) (♣) (*ENS*) Soient $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$.

a) Montrer que $\forall (u, v) \in [0, +\infty[^2$, $uv \leq \frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q$. En déduire que $\langle x, y \rangle \leq \|x\|_p \|y\|_q$.

b) *Norme d'Hölder.* Montrer que $x \longmapsto \|x\|_p$ est une norme.

c) Montrer que $\|x\|_p = \sup\{\langle x, y \rangle \mid \|y\|_q \leq 1\}$.

Remarque culturelle : De même, on a $\|x\|_1 = \sup\{\langle x, y \rangle \mid \|y\|_\infty \leq 1\}$.

Ouverts et fermés

7) (♣) (*Centrale*) On considère $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x, y) \longmapsto x$.

a) Montrer que l'image d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ par p est un ouvert.

b) La propriété est-elle vraie pour une partie fermée F de $\mathbb{R}^2$?

Compacité

8) (♣) (★) (*ENS*) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue.

a) Soit $c \in \mathbb{R}$. On suppose que $f^{-1}(\{c\})$ est un singleton. Montrer que c est un extremum de f.

b) On suppose qu'il existe c tel que $f^{-1}(\{c\})$ est compact. Montrer que f admet un extremum global.