**Oraux. Série n°9. Indications**

**1)** a) Si $f(x) = f(x/2)$, alors $f(x) = f(x/2^n) \to f(0)$ par continuité : donc $f$ cosntante.

b) Supposons $f(2x) = 2f(x)$ et $f$ de classe $C^1$.

Par a) appliqué à $g(x) = f'(x)$. Donc $f'$ constante. Mais on a $f(0) = 0$. Donc $f(x) = ax$. Réciproque évidente.

Supposons $f(2x) = 2f(x) + 1$. On a directement $f(x) = -1 + ax$, car $-1$ solution et par linéarité de l'équation.

*Remarque culturelle* : La propriété est vraie en supposant seulement $f$ dérivable en 0.

En effet, si $f(x) = 2f(x/2)$, alors $f(0) = 0$ et $f(x) = 2^n f(x/2^n) \to xf'(0)$ car $f(h) = hf'(0) + \mathfrak{o}(h)$ en $h = 0$.

c) On applique a) à $g(x) = f''(x)$.

**1) bis)** a) Par translation, se ramener au cas $g(2x) = g(x)$.

b) Considérer $g(x) = f(x) - ax - b$ bien choisie de sorte que $g(2x) = 4g(x)$. En déduire $g(x) = kx^2$.

**2)** a) *Analyse-synthèse* : On a nécéssairement $f'(x+y) = f'(x)$ donc $f'$ est constante.

Mais $f(0+0) = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$, d'où $f(x) = ax$. Réciproque immédiate.

*Remarque culturelle* : En fait, on peut affaiblir l'hypothèse en supposant $f$ seulement continue : La preuve est plus délicate : on montre que $f(r) = rf(1)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$, et on conclut par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et continuité de $f$.

b) Se ramener au cas $g(x+y) = g(x)g(y)$.

**3)** c) Poser $g(x) = \operatorname{th}(f(x))$.

d) On a nécessairement $g(x) \in ]-1, 1[$. Poser $f(x) = \arctan(g(x)) \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et conclure à une contradiction.

**4)** a) *Analyse-synthèse.* La relation s'écrit aussi $f(a+h) - f(a-h) = 2f'(a)$.

Montrer que $f$ est de classe $C^2$. A l'aide d'un DL ou bien en dérivant judicieusement, montrer que $f^{(3)} = 0$.

b) On sera amené à distinguer les cas suivants : $a + b \neq 1$, $(a + b = 1$ et $a \neq b)$, $(a = b = \frac{1}{2})$.

**5)** a) *Suite de type Fibonacci.* L'équation caractéristique a pour racines $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$.

b) On considère $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x, y) \longmapsto (y, \frac{1}{6}(x+y))$. On a ainsi $f(u_n, u_{n+1}) = f(u_{n+1}, u_{n+2})$.

Donc $f(u_0, u_1) = f(u_n, u_{n+1}) \to f(0, 0)$. Donc $f$ est constante. Réciproque immédiate.