Oraux. Série n°9. Relations fonctionnelles

1) ($\clubsuit$) a) Montrer que toute fonction continue f vérifiant $f(2x)=f(x)$ est constante.

b) En déduire les fonctions de classe C^1 vérifiant $f(2x)=2f(x)$, puis celles vérifiant $f(2x)=2f(x)+1$.

c) Déterminer les fonctions de classe C^∞ vérifiant $f(2x)=4f(x)+1$.

2) ($\clubsuit$) a) Montrer que les applications C^1 vérifiant $f(x+y)=f(x)+f(y)$ sont les fonctions $x\longmapsto ax$.

b) Déterminer les fonctions continues $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y)=f(x)+f(y)-f(x)f(y)$.

3) ($\clubsuit$) (X) a) Déterminer les fonctions continues $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que $f(2x)=2f(x)$.

b) Exprimer $\mathrm{th}(2x)$ en fonction de $\mathrm{th}(x)$.

c) Déterminer les fonctions continues $g:\mathbb{R}\to]-1,1[$ dérivables en 0 telles que $g(2x)=\dfrac{2g(x)}{1+g(x)^2}$.

d) Déterminer les fonctions continues $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que $g(2x)=\dfrac{2g(x)}{1-g(x)^2}$.

4) ($\clubsuit$) a) Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $\forall x\neq y,\ f'\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

b) Soient a et b deux réels. Déterminer les $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $\forall x\neq y,\ f'(ax+by)=\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

5) ($\clubsuit$) (*Mines*) a) Etudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n\in\mathbb{N},\ 6u_{n+2}=u_n+u_{n+1}$.

b) Déterminer les fonctions continues $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant $f(x,y)=f(y,\frac{1}{6}(x+y))$.