**Oraux. Série n°8. Fonctions continues, dérivables, et intégration sur un segment**

**Fonctions continues**

**1)** a) Posons $L = \lim_{+\infty} f$. Pour $x \geq a$ assez grand, $|f(x)| \leq |L| + 1$. considérer $\max(|L|+1, \sup_{[0,a]}|f|)$.

b) Pour $x \geq a$ assez grand, $f(x) \leq f(0)$. Posons $m = \sup_{[0,a]} f$, qui est atteint car $[0,a]$ compact et $f$ continue.

On a $\forall x \geq a$, $f(x) \leq f(0) \leq m$, donc $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \leq m$. On en déduit que $m = \sup f$.

**2)** On raisonne par l'absurde : Ainsi, on suppose qu'il existe une valeur $y$ qui admet un nombre fini d'antécédents.

Il existe donc $a \in \mathbb{R}^+$ tel que $f$ ne prend pas la valeur $y$ sur $[a, +\infty[$.

Par le TVI, on a donc $\forall x \in [a,+\infty[$, $f(x) > y$ ou bien $\forall x \in [a,+\infty[$, $f(x) < y$.

Or, par Weierstrass, $f([0,a])$ est un segment.

Ainsi, dans le preier cas, $f$ est minorée sur $\mathbb{R}^+$ et dans le second, $f$ est majorée sur $\mathbb{R}^+$ .

Donc $f$ non surjective. D'où contradiction..

**3)** a)b) Dans les deux cas, faire intervenir $g(x) = f(x) - x$.

**4)** *Remarque* : Plus généralement, toute valeur moyenne de valeurs prises par $f$ est atteinte.

**5)** a) Non, car l'image continue d'un segment est un segment.

b) Prendre par exemple $f$ affine par morceaux, valant 0 sur $]0, \frac{1}{3}]$ et valant 1 sur $[\frac{2}{3}, 1[$.

c) Si $f$ était injective, elle serait monotone ... conclure avec le th de la limlite monotone.

**6)** $f$ étant monotone, on a $\lim_{x^-} f \leq f(x) \leq \lim_{x^+} f$, et $f$ continue ssi $\lim_{x^-} f = \lim_{x^+} f$.

**7)** a) $f \circ f = f$ ssi $\forall x \in [a,b]$ , $f(x) = x$. b) Si $f$ dériable, $f'(a) = 1$, donc $a = 0$. De même $b = 1$.

**Dérivation, Taylor, Rolle, étude de fonctions**

**8)** a) Si $f'$ ne s'annulait pas, alors par le TVI, $f'$ de signe constant.

b) On a $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$, avec $P_n$ polynôme de degré $n$. Et on a $\lim_{n\to\pm\infty} f^{(k)} = 0$.

**9)** *Première méthode* : Appliquer Rolle à $f(x) = e^{-\lambda x}P(x)$ avec aussi un zéro de $f$ en un infini.

On peut aussi noter qu'un polynôme de degré $n$ admettant au moins $(n-1)$ racines est scindé.

*Seconde méthode* : Représenter le graphe de $\varphi : x \longmapsto \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k}$.

*Remarque* : De même, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ et $f(a) = f(b) = 0$, alors $\forall \lambda$, $\exists\, c$, $f'(c) = \lambda f(c)$.

**10)** a) Le mieux est d'utiliser $\Delta_h = \frac{1}{h}(D - \mathrm{Id})$, donc $(\Delta_h)^n = \frac{1}{h^n}(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} D^k)$.

b) Appliquer a) avec $f(x) = x^p$ et $h = 1$. Noter en particulier que $\Delta^n(f)(x) = n!$

c) On peut utiliser Taylor et b), ou bien utiliser le même principe qu'au d).

d) $(\Delta_h)^n(f) = (\Delta_h)^{n-1}(\Delta_h(f))$ et procéder par récurrence (en appliqaunt l'hyp de réc à $g = \Delta_h(f)$).

**11)** On a $f(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})$, où $g(x) = \frac{1}{1+x}$. Or, $f^{(n)}(0) = \lim_{h\to 0} q^n(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f(\frac{k}{q}))$. Idem pour $g$.

**12)** d) On trouvera $\Delta = \{\lambda \in \mathbb{R}^* \mid \frac{1}{\lambda} - 1 \geq 0\} = ]0,1]$.

e) Si $g = T(f)$, alors $g$ est $C^1$ sur $]0,+\infty[$ et $g'(x) = \frac{1}{x}\left(f(x) - g(x)\right) = \frac{1}{x}\mathfrak{o}\left(1\right)$ car $\lim_{x\to 0}(f-g) = 0$.

Réciproquement, supposons que $g$ est $C^1$ sur $]0,+\infty[$ et que $g'(x) = \mathfrak{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.

On définit $f$ sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = (xg(x))' = xg'(x) + g(x) \to g(0)$ en $x = 0$. Donc $f$ continue sur $[0,1]$.

**Intégration sur un segment**

**13)** a) Poser $I_{n,m} = \int_a^b (t-a)^n(b-t)^m\ dt$, et noter que $I_{n,m} = \frac{m}{n+1}I_{n+1,m-1}$, et en déduire $I_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}I_{2n,0}$.

b) $K = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\ dt = \int_0^{\pi}(\cos\theta)^2\ d\theta = \int_0^{\pi}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta)\ d\theta = \frac{\pi}{2}$.

$t(1-t) = \frac{1}{4}(1-(2t-1)^2)$, donc $L = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\ du = \frac{\pi}{4}$, avec $u = 2t-1$.

**14)** a) IPP avec $(\cos t)^n = (\cos t)(\cos t)^{n-1}$. On obtient $W_n = (n-1)(W_{n-2} - W_n)$.

Conclure avec $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$.

b) On a $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $0 \leq (\cos t)^{n+1} \leq (\cos t)^n$ donc $W_{n+1} \leq W_n$.

On déduit $nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ de a) par récurrence. On en déduit $nW_n^2 \leq \frac{\pi}{2} \leq n(W_{n-1})^2$, d'où $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

**15)** $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{k,n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F^{-1}(\frac{k}{n}M) \to \frac{1}{M}\int_0^M F^{-1}(u)\ du = \frac{1}{M}\int_a^b xf(x)\ dx$, où $M = \int_a^b f(x)\ dx$.

**16)** Se ramener au cas où $\int_0^1 f(t)\ dt = 0$. Dans ce cas, en intégrant par parties, montrer que $L = 0$.