

Oraux. Série n°8. Fonctions continues, dérivables, et intégration sur un segment

Fonctions continues

1) (♣) Continuité et compacité

a) Montrer que toute fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ et convergente en $+\infty$ est bornée.

b) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Montrer que $\sup f$ est atteint.

Remarque : De même, si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifie $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x,y) = -\infty$, alors $\sup f$ est atteint.

2) (♣) (X) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et surjective.

Montrer que tout réel y admet une infinité d'antécédents par f .

3) (♣) a) Montrer que toute fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ admet un point fixe.

b) (♣) (X) Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe a tel que $f(a) = a$.

4) (♣) Soient des réels a et b tels que $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et des réels p et $q > 0$.

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c)$.

Remarque : Plus généralement, toute valeur moyenne de valeurs prises par f est atteinte.

5) (♣) a) (X) Existe-t-il une fonction continue surjective de $[0, 1]$ sur $]0, 1[$?

b) Existe-t-il une fonction continue surjective de $]0, 1[$ sur $[0, 1]$?

c) Soit f une fonction continue surjective de $]0, 1[$ sur $[0, 1]$. Montrer que f n'est pas injective.

6) (♣) (X) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ monotone. Montrer que f est continue ssi $f(I)$ est un intervalle.

7) (♣) (Centrale) Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue.

a) Montrer qu'il existe $(a, b) \in [0, 1]^2$ tel que $f([0, 1]) = [a, b]$. Donner une CNS pour que $f \circ f = f$.

b) On suppose f dérivable et $f \circ f = f$. Montrer que $f = \text{Id}$.

Dérivation, Taylor, Rolle, étude de fonctions

8) (♣) a) *Lemme de Rolle généralisé.* Soit $f : [a, +\infty[$ de classe C^1 telle que $f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Montrer que f' s'annule sur $]a, +\infty[$.

b) On considère $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Montrer que $f^{(n)}$ admet n zéros.

9) (♣) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et P un polynôme réel à racines simples. On considère $Q = P' - \lambda P$.

Montrer que Q est scindé (à racines simples).

Remarque : De même, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $f(a) = f(b) = 0$, alors $\forall \lambda, \exists c, f'(c) = \lambda f(c)$.

10) (♣) Dérivation discrète. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ .

Pour $h > 0$, on considère l'opérateur Δ_h défini par $\Delta_h(f)(x) = \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x))$.

a) Montrer que $(\Delta_h)^n(f)(x) = \frac{1}{h^n}(\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x+kh))$.

b) En déduire que $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^p = 0$ pour tout $p < n$, et que $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^n = n!$

c) On suppose n fixé. Montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} (\Delta_h)^n(f)(0) = f^{(n)}(0)$.

d) Soient $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $y \in [x, x+nh]$ tel que $(\Delta_h)^n(f)(x) = f^{(n)}(y)$.

11) (♣) (X) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ . On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{n+1}$. Calculer les $f^{(n)}(0)$.

Indication : On a $f(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})$, où $g(x) = \frac{1}{1+x}$. Or, $f^{(n)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} q^n (\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(\frac{k}{q}))$. Idem pour g .

12) (♣) (Centrale) On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles.

Pour $f \in E$, on définit $T(f)$ la fonction définie par $T(f)(0) = f(0)$ et $\forall x \in]0, 1]$, $T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

Remarque : Ainsi, $T(f)(x)$ est la valeur moyenne de f sur $[0, x]$. Noter que $T(f)$ est de classe C^1 sur $]0, 1]$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E .

b) Montrer que T est injectif et que T n'est pas surjectif.

c) Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tels que $T(f) = \lambda f$. Montrer que $\forall x \in]0, 1]$, $xf'(x) = \mu f(x)$, où $\mu = \frac{1}{\lambda} - 1$.

d) On dit qu'un réel λ est une valeur propre de T ssi il existe une fonction non nulle $f \in E$ telle que $T(f) = \lambda f$.

Déterminer l'ensemble Δ des valeurs propres de T .

e) Montrer que $\text{Im } T = \{g \in E \mid g \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } g'(x) = \mathfrak{o}_{+\infty}(\frac{1}{x})\}$.

Intégration sur un segment

13) (♣) Calculer les intégrales suivantes :

a) $I_n = \int_a^b (t-a)^n (b-t)^n dt$.

b) $K = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$ (poser $t = \sin \theta$) et $L = \int_0^1 \sqrt{t(1-t)} dt$ (se ramener au cas précédent).

14) (♣) Intégrales de Wallis : $W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt$.

a) Montrer que $\forall n \geq 2$, $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$. En déduire $W_{2m} = \frac{n!}{4^m (m!)^2} \frac{\pi}{2}$ et $W_{2m+1} = \frac{4^m (m!)^2}{(n!)}$.

b) Préciser la monotonie de $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que $nW_n W_{n-1} = \frac{\pi}{2}$, et en déduire $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

c) Retrouver le résultat précédent en utilisant la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$.

15) (♣) (Centrale) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue strictement positive.

a) Montrer qu'il existe $(x_{k,n})_{0 \leq k \leq n}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \int_a^{x_{k,n}} f(t) dt = \frac{k}{n} \int_a^b f(t) dt$.

b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{k,n} = \left(\int_a^b x f(x) dx \right) / \left(\int_a^b f(x) dx \right)$.

16) (♣) (X) Soient $g \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f est 1-périodique.

Calculer $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g(t) f(nt) dt$.

16) bis) (♣) (ENS) Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f est 1-périodique et non identiquement nulle.

a) Montrer qu'il existe un plus petit entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $\int_0^1 t^p f(t) dt \neq 0$.

b) Soit $g \in C^p([0, 1], \mathbb{R})$. Donner un DA en $\mathfrak{o}\left(\frac{1}{n^p}\right)$ de $I_n = \int_0^1 g(t) f(nt) dt$.