Oraux. Série n°7. Indications

Partie convexes de $\mathbb{R}$

1) ($\clubsuit$) Soit $A \subset [0, +\infty[$ non vide telle que $\forall x \in A$, $[0, x] \subset A$.

Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que $A = [0, \alpha[$ ou $A = [0, \alpha]$.

Approximation d'un réel

2) a) Noter d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 < e - \dfrac{k}{n!} < \dfrac{e}{(n+1)!}$.

3) Considérer $p \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda \leq 2^p$.

Parties denses dans $\mathbb{R}$

4) On suppose θ/π irrationnel. Les complexes $z_n = e^{in\theta}$, où $n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux distincts : par le principe des tiroirs, on peut trouver des z_n arbitrairement près. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n > m$ tels que $|z_n - z_m| < \varepsilon$. On en déduit $|z_q - 1| \leq \varepsilon$, où $q = n - m$, et en considérant les z^k, avec $k \in \mathbb{N}$, on peut approcher à ε près tout point du cercle unité par un des e^{ikq}, où $k \in \mathbb{N}$.

5) a) On pourra poser $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*) \geq 0$.

Remarque : En fait, (i) est vraie ssi $a/b \in \mathbb{Q}$, on dit que a et b sont commensurables.

b) Montrer d'abord que $G = \{a + b\sqrt{3},\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

On pourra utiliser le fait que $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{3} - 1)^n = 0$.

Valeurs d'adhérences

6) a) ii) implique i) : construire $\varphi(k)$ par récurrence de sorte $\varphi(k) > \varphi(k-1)$ et $\left|u_{\varphi(k)} - \lambda\right| \leq \frac{1}{k}$.

b) Utiliser ii) : Supposons $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda \in \overline{\Delta}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n tel que $|\lambda_n - \lambda| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$.

c) Soient α et β deux valeurs d'adhérences, et $\lambda \in]\alpha, \beta[$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Il existe n_0 tel que $\forall k \geq n_0$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$.

Il existe n et $m \geq \max(N, n_0)$ tels que u_n assez proche de α et u_m assez proche de β pour que $u_n \leq \lambda \leq u_m$.

On en déduit qu'il existe p compris entre n et m tel que $|u_p - \lambda| \leq \varepsilon$.

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ fixé arbitrairement, on peut donc trouver p arbitrairement grand tel que $|u_p - \lambda| \leq \varepsilon$.

Théorème des valeurs intermédiaires

7) On pose $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$. Considérer la valeur moyenne des $g(\frac{k}{n})$, avec $0 \leq k \leq n-1$.

Remarque : De façon générale, toute valeur moyenne d'une fonction continue est atteinte.

7) bis) On a d'abord $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x+n) = f(x) + n$, et en déduire $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(x+n) = f(x) + n$.

Pour $a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, noter que $\sum_{k+0}^{q-1}(f(x_0 + ka) - f(x_0)) = p$, et s'inspirer de 7).

Compacité

8) a) K est fermée (stable par passage à la limite, cf continuité et inégalités larges) et borné (inclus dans $[a,b]^2$).

b) φ est continue donc $\inf_K \varphi$ est atteint, donc > 0. Posons $\alpha = \inf \varphi$.

Ainsi, pour tout $(x,y) \in K$, $\varphi(x,y) = |x-y| \geq \alpha$, d'où le résultat par contraposition.

9) Il suffit en fait d'avoir $\forall x$, $|f(x) - f(x-1)| \leq K$.

En effet, pour $x \geq 0$, en considérant $n = \lfloor x \rfloor$ et $x = n + r$, on a $|f(x) - f(r)| \leq nK$.

Donc $|f(x)| \leq nK + |f(r)| \leq nK + M$, où $M = \sup_{[0,1]} |f|$, donc $|f(x)| \leq xK + M$.

On procède de même sur $\mathbb{R}^-$ (il suffit d'ailleurs de considérer $x \longmapsto f(-x)$).

Donc $(a,b) = (K, \sup_{[-1,1]} |f|)$ convient.

10) a) Par linéarité des applications $P \longmapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(a + re^{i\theta})\, d\theta$ et de $P \longmapsto P(a)$, il suffit de prouver la propriété pour les $P = (X-a)^n$, avec $n \in \mathbb{N}$, qui forment une base (de degrés échelonnés) de $\mathbb{C}[X]$.

Or, on a $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^n = 0 = P(a)$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $= 1 = P(a)$ si $n = 0$. D'où le résultat.

b) $z \longmapsto P(z)$ est continue et $y \longmapsto |y|$ est 1-lipschitzienne donc $z \longmapsto |P(z)|$ est continue.

Comme K est compact, $M = \sup_{z \in K} |P(z)|$ est atteint sur K : il existe $a \in K$ tel que $|P(a)| = M$.

Supposons par l'absurde que a appartient à l'intérieur de K. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset K$.

On a donc $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(a + re^{i\theta})\, d\theta = P(a)$, donc $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| P(a + re^{i\theta}) \right|\, d\theta \geq |P(a)| = M$.

Comme $M = \sup_{z \in K} |P(z)|$, alors nécessairement, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, $\left| P(a + re^{i\theta}) \right| = M$.

Comme on peut toujours diminuer $r > 0$ sans modifier $B(a,r) \subset K$, la propriété $|P(a+z)| = M$ est donc vraie dans tout le disque $D(a,r)$. Montrons pour conclure que cela implique P constant (et dans ce cas, tout point de la frontière convient).

En effet, supposons P non constant.

On a donc $P(a+h) = P(a) + \lambda h^m + \mathfrak{o}\left(h^m\right)$ lorsque $h \to 0$, avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \neq 0$.

On choisit θ de sorte que $\lambda e^{im\theta}$ soit colinéaire à $P(a)$. Alors, pour r assez petit, $\left| P(a + re^{i\theta}) \right| > |P(a)|$.