Oraux. Série n°7. Topologie dans $\mathbb{R}$

Parties convexes de $\mathbb{R}$

1) ($\clubsuit$) Soit $A \subset [0, +\infty[$ non vide telle que $\forall x \in A$, $[0, x] \subset A$.

Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que $A = [0, \alpha[$ ou $A = [0, \alpha]$.

Approximation d'un réel

Remarque : Condition suffisante d'irrationnalité : Si $x = \dfrac{p_n}{q_n} + \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n \neq 0$ et $\varepsilon_n = \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{q_n}\right)$ et $\lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty$, alors x irrationnel. En effet, si $x = \dfrac{p}{q}$, on aurait $\left|\dfrac{p}{q} - \dfrac{p_n}{q_n}\right| \geq \dfrac{1}{qq_n}$, car $pq_n - qp_n$ entier (non nul car $\varepsilon_n \neq 0$).

2) ($\clubsuit$) a) (X) Montrer que $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}$ est irrationnel.

Indication : Noter d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 < e - \dfrac{k}{n!} < \dfrac{e}{(n+1)!}$.

b) (X) Montrer que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n^2}$ est irrationnel.

3) ($\clubsuit$) (X) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante, telle que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(2x)}{f(x)} = 1$. Montrer que $\forall \lambda > 1$, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(\lambda x)}{f(x)} = 1$.

Parties denses dans $\mathbb{R}$

◀ Deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui coincident sur une partie dense sont égales : les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant $f(x + y) = f(x) + f(y)$ sont les fonctions $x \longmapsto ax$; en effet, on a $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$ où $a = f(1)$.

◀ Partie dense dans $\mathbb{R}$: Si $\inf(A \cap \mathbb{R}_+^*) = 0$ et si ($\forall a \in A$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $na \in A$), alors A est dense dans $\mathbb{R}$.

Important : Si $\inf(A \cap \mathbb{R}_+^*) = 0$ et si ($\forall a \in A$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $na \in A$), alors A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exemple : L'ensemble $A = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, car $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{2} - 1)^n = 0$ et $(\sqrt{2} - 1)^n \in A$.

Remarque : En fait, $\mathbb{N} - \sqrt{2}\mathbb{N} = \{p - \sqrt{2}q,\ (p, q) \in \mathbb{N}^2\}$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$:

En effet $(1 - \sqrt{2})^n \in \mathbb{N} - \sqrt{2}\mathbb{N}$. Comme $(1 - \sqrt{2}) < 0$ et $\lim_{n\to+\infty}(1 - \sqrt{2})^n = 0$, on peut approcher tout réel x par des $(1 - \sqrt{2})^n \lambda_n$, avec $\lambda_n = \lfloor x(1 - \sqrt{2})^{-n} \rfloor \in \mathbb{N}$ en prenant n pair si $x \geq 0$, et n impair si $x \leq 0$.

4) ($\clubsuit$) (*X-ESPCI*) Donner une CNS sur θ pour que $\{e^{in\theta},\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans le cercle unité U.

Indication : On suppose θ/π irrationnel. Les complexes $z_n = e^{in\theta}$, où $n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux distincts : par le principe des tiroirs, on peut trouver des z_n arbitrairement près. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n > m$ tels que $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

On en déduit $|z_q - 1| \leq \varepsilon$, où $q = n - m$, et en considérant les z^k, avec $k \in \mathbb{N}$, on peut approcher à ε près tout point du cercle unité par un des e^{ikq}, où $k \in \mathbb{N}$.

5) ($\clubsuit$) a) Soient a et b deux réels strictement positifs. On pose $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{an + bp,\ (n, p) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Montrer que l'une des deux propriétés suivantes est vraie :

(i) Il existe $\alpha > 0$ tel que $G = \alpha\mathbb{Z}$

(ii) G est dense dans $\mathbb{R}$.

Valeurs d'adhérences

6) ($\clubsuit$) *Valeurs d'adhérence*

a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe une suite extraite $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k\to+\infty} u_{\varphi(k)} = \lambda$.

ii) $\forall \varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in [\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon]\}$ est infini (= non majoré, car partie de $\mathbb{N}$).

On dit alors que λ est une valeur d'adhérence.

b) On note Δ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$Montrer que Δ est fermé, c'est-à-dire $\overline{\Delta} = \Delta$.

c) ($\bigstar$) On suppose que $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$.

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un intervalle (c'est-à-dire est convexe).

Théorème des valeurs intermédiaires

7) ($\clubsuit$) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $f(0) = f(1)$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ tel que $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$.

Indication : On pose $g(x) = f(x+\frac{1}{n}) - f(x)$. Considérer la valeur moyenne de valeurs de g bien choisies.

Remarque : De façon générale, toute valeur moyenne d'une fonction continue est atteinte.

7) bis) (*Mines*) ($\bigstar$) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x) + 1$.

Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Q}$, il existe x_0 tel que $f(x_0 + a) = f(x_0) + a$.

Compacité, Propriété de Weierstrass

8) ($\clubsuit$) (*ENS*) On suppose $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Soit $\varepsilon > 0$.

a) Montrer que $K = \{(x,y) \in [a,b]^2 \mid |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\}$ est compact.

b) En considérant $\varphi : (x,y) \longmapsto |x-y|$, en déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2,\ |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Remarque cuturelle : On dit que f est uniformément continue (car α est indépendant du point de continuité). Ainsi, toute fonction continue sur un segment est uniformément continue (mais non nécessairement lipschitzienne).

9) ($\clubsuit$) (X) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $K \in \mathbb{R}^+$ tels que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x-y| \leq 1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq K$.

Montrer qu'il existe a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq a\,|x| + b$.

10) ($\clubsuit$) (*X-ESPCI*) a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}^+$, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(a + re^{i\theta})\, d\theta = P(a)$.

b) Soit K un compact non vide de $\mathbb{C}$.

Montrer que $\sup_{z\in K} |P(z)|$ est atteint sur la frontière de K (c'est-à-dire sur K privé de son intérieur).