

Oraux. Série n°6. Indications

Inégalités triangulaires, inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité de Taylor-Lagrange

1) Appliquer le théorème des accroissements finis sur $[a, c]$ et $[b, c]$, où $c = \frac{1}{2}(a + b)$.

Montrer qu'il n'y a pas égalité (sauf si f nulle), mais que $\frac{1}{4}(b - a)^2$ est la meilleure constante possible.

2) Par IPP, $\int_a^b f'(t)^2 dt = - \int_a^b f(t) f''(t) dt$, et on conclut par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Il y a égalité lorsque f et f'' sont colinéaires. On obtient donc les $f(x) = A \sin(n\pi \frac{x-a}{b-a})$, avec $n \in \mathbb{N}$.

3) Justifier $|f(x + h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{1}{2} M_2 h^2$ et en déduire $\forall h > 0, |f'(x)| \leq 2M_0 \frac{1}{h} + \frac{1}{2} M_2 h$.

Déterminer pour conclure la valeur de h minimisant le second terme de l'inégalité précédente.

Solution : a) Par Taylor-Lagrange, on a $|f(x + h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{1}{2} M_2 h^2$.

De même, $|f(x - h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{1}{2} M_2 h^2$.

Or, $f(x + h) - f(x - h) - 2hf'(x) = (f(x + h) - f(x) - hf'(x)) - (f(x - h) - f(x) + hf'(x))$.

Donc $|f(x + h) - f(x - h) - 2hf'(x)| \leq M_2 h^2$. On en déduit $2h |f'(x)| \leq 2M_0 + M_2 h^2$.

Comme la relation est vraie pour tout h , on a $|f'(x)|^2 \leq 2M_0 M_2$ (discriminant d'un polynôme à valeurs positives).

Une variante consiste à déterminer la valeur minimale de $h \mapsto M_0 h^{-1} + \frac{1}{2} M_2 h$.

Remarque : Si on utilise seulement $|f(x + h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{1}{2} M_2 h^2$, on a $h |f'(x)| \leq 2M_0 + \frac{1}{2} M_2 h^2$.

Donc $|f'(x)|^2 \leq 4M_0 M_2$, ce qui permet d'obtenir l'inégalité moins forte $\sup |f'| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

4) a) Taylor-Lagrange et Taylor Young respectivement.

b) Montrer avec a) que $|\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n^2}) - \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}| \leq M \sum_{k=1}^n (\frac{k}{n^2})^2$, et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n^2}) = \frac{1}{2}$.

Le second cas se ramène au premier en passant au logarithme et en considérant $g(x) = \ln(1 + f(x))$, qui vérifie aussi les mêmes propriétés que f , c'est-à-dire $g(0) = 0, g'(0) = 1$.

5) On suppose par l'absurde qu'il existe X non nul tel que $AX = 0$.

On considère $|x_p| = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$. Considérer $a_{pp}x_p = - \sum_{j \neq p} a_{pj}x_j$ pour conclure à une contradiction.

Comparaison de sommes et d'intégrales (et sommes de Riemann)

6) b) On a $\int_{n-1}^{3n} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k} \leq \int_n^{3n+1} \frac{dt}{t}$.

On a $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$, où $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = \int_0^1 f(t) dt = [\arcsin t]_0^1$.

On a $\ln((n!)^{1/n}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k$, et utiliser $\int_0^n (\ln t) dt = n \ln n - n$ via un encadrement.

7) a) Comparer avec une intégrale $\int_x^y \frac{1}{t} dt$:

Evaluer l'écart en utilisant $\frac{1}{\arctan t} - \frac{1}{t}$ prolongeable par continuité en 0, donc bornée par un réel M sur un voisinage

$V = [-a, a]$ de 0, d'où $\forall x \in [-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a], \int_x^{2x} \left| \frac{1}{\arctan t} - \frac{1}{t} \right| dt \leq \int_x^{2x} M dt = Mx$.

8) b) Utiliser une IPP afin d'écrire $R(x) = g(x) - S(x)$, où l'intégrale $S(x) = \mathfrak{o}_{+\infty}(R(x))$.

Solution : IPP : On a $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{2t}{2t} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt$, et noter que $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt \leq \frac{1}{2x} f(x)$.

Eventuellement, faire avant un changement de variable pour se ramener à une situation plus simple.

c) Même principe qu'au b), mais il est plus délicat de prouver le $\mathfrak{o}_{+\infty}(\dots)$: couper l'intégrale en 2.

0) (X) Soit $\forall x > 0, f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$. Déterminer un DA asymptotique à deux termes en 0.

9) a) $f(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$ et conclure par pincement.

b) Le mieux est de considérer $g(n) = f(n) - \ln n$. On a ainsi $g(n+1) - g(n) = \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Pour $n \geq p$ assez grand, $|g(n)| \leq |g(n_0)| + \varepsilon \left(\sum_{k=p}^n \frac{1}{k}\right) \leq |g(n_0)| + \varepsilon \ln n$. Donc $g(n) = \mathfrak{o}(\ln n)$ et $f(n) \sim \ln n$.

Majoration des racines d'un polynôme à coefficients complexes

10) a) Ecrire $a_n z^n = -(a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0)$.

b) Supposons $|z| > 1$. Alors $|a_n z| \leq |a_{n-1}| + \dots + |a_0 z^{-(n-1)}| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$.

c) Pour $|z| > 1$, $|z^n| \leq m(1 + |z| + \dots + |z^{n-1}|) = m \frac{|z^n|-1}{|z|-1} \leq m \frac{|z^n|}{|z|-1}$, donc $|z| \leq 1 + m$. Vrai aussi si $|z| \leq 1$.

11) a) La méthode la plus simple est de considérer $\forall x > 0, f(x) = \frac{P(x)}{x^d} = 1 - \sum_{k=0}^{d-1} \frac{a_k}{x^{d-k}}$.

b) Si $P(\lambda) = 0$ et $\lambda \neq 0$, alors $1 = \left| \sum_{k=0}^{d-1} \frac{a_k}{\lambda^{d-k}} \right| \leq \sum_{k=0}^{d-1} \frac{|a_k|}{|\lambda|^{d-k}}$, donc $f(|\lambda|) < 0$, c'est-à-dire $|\lambda| \leq \rho$.

Compacité

12) a) Considérer le plus petit p tel que $u_p = \min_{0 \leq k \leq p} (u_k)$ et supposer par l'absurde que $u_p < 0$.

b) Par l'absurde. Justifier l'existence de c tel que $f(c) = \inf f$. Que vaut $f'(c)$? En déduire $0 = f(b) \leq f(c)$.

13) On pourra considérer la fonction continue $\varphi : x \mapsto \frac{f(x)}{x^2}$ (prolongeable par continuité en 0).

Etude de fonctions

15) Fixer v et étudier la fonction $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad u \mapsto \frac{1}{p} u^p - uv$.

16) Considérer la monotonie de $f(x) = a^x + b^x$ lorsque $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$.