Oraux. Série n°6. Inégalités

Inégalités triangulaires, inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité de Taylor-Lagrange

1) (♣) (X) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que $\left|\int_a^b f\right| \leq \frac{1}{4}(b-a)^2 \left\|f'\right\|_\infty$.

Etudier le cas d'égalité.

2) (♣) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(a) = f(b) = 0$.

Montrer que $\left(\int_a^b f'(t)^2 dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2\ dt\right)\left(\int_0^1 f''(t)^2\ dt\right)$. Préciser les cas d'égalité

3) (♣) (X) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On suppose f et f'' bornées. On pose $M_0 = \sup|f|$ et $M_2 = \sup|f''|$.

Montrer que f' est bornée et que $\sup|f'| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Indication : Justifier $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{1}{2}M_2 h^2$ et en déduire $\forall h > 0$, $|f'(x)| \leq 2M_0\frac{1}{h} + \frac{1}{2}M_2 h$.

Déterminer pour conclure la valeur de h minimisant le second terme de l'inégalité précédente.

4) (♣) *Approximation d'une fonction par sa tangente.* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, avec $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

a) Montrer l'existence d'un réel M tel que $\forall x \in [0, 1]$, $|f(x) - x| \leq Mx^2$. Que vaut $\lim_{x\to 0, x>0} \dfrac{f(x) - x}{x^2}$?

b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$ et $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)\right)$.

Indications : a) Taylor-Lagrange et Taylor Young respectivement.

b) Montrer avec a) que $\left|\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n^2}) - \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}\right| \leq M\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n^2}\right)^2$, et en déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n^2}) = \frac{1}{2}$.

Le second cas se ramène au premier en passant au logarithme et en considérant $g(x) = \ln(1 + f(x))$, qui vérifie aussi les mêmes propriétés que f, c'est-à-dire $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$.

5) (♣) *Matrices à diagonale dominante*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$. Montrer que A est inversible.

Comparaison de sommes et d'intégrales (et sommes de Riemann)

6) (♣) a) Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^n k^2$ et de $\sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{3n} \dfrac{1}{k} = \ln 3$, que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = \dfrac{\pi}{4}$ et que $(n!)^{1/n} \sim ne^{-1}$.

Indications : b) On a $\int_{n-1}^{3n} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k} \leq \int_n^{3n+1} \frac{dt}{t}$.

On a $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$, où $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = \int_0^1 f(t)\ dt = [\arcsin t]_0^1$.

On a $\ln((n!)^{1/n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln k$, et utiliser $\int_0^n (\ln t)\ dt = n\ln n - n$ via un encadrement.

7) (♣) a) Déterminer $\lim_{x\to 0, x\neq 0} \int_x^{2x} \dfrac{dt}{\arctan(t)}$ et $\lim_{x\to 1, x\neq 1} \int_x^{x^2} \dfrac{dt}{\ln t}$.

b) Déterminer un équivalent de $f(x) = \int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t}\ dt$ et de $g(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t+x}\ dt$ lorsque x tend vers 0^+.

8) ($\clubsuit$) *Evaluation d'intégrales par une intégration par parties*

a) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer (par intégration par parties) que $\int_0^1 f(t)\ t^n\ dt = \dfrac{f(1)}{n} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

b) On considère $R(x) = \int_x^{+\infty} \exp(-t^2)\ dt$. Déterminer un équivalent de $R(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

c) ($\bigstar$) On considère $F(x) = \int_0^x \exp(t^2)\ dt$. Déterminer un équivalent de $F(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

9) ($\clubsuit$) a) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ croissante telle que $\forall x \geq 1,\ f(x) - f(x-1) = \dfrac{1}{x}$.

Montrer que $f(x) \sim \ln x$ en $+\infty$.

b) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ croissante telle que $f(x) - f(x-1) \sim \dfrac{1}{x}$. Montrer que $f(x) \sim \dfrac{1}{x}$ en $+\infty$.

Majoration des racines d'un polynôme à coefficients complexes

10) ($\clubsuit$) Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de $P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, avec $a_n \neq 0$.

a) Montrer que $|a_n z^n| \leq \left|a_{n-1}z^{n-1}\right| + ... + |a_1 z| + |a_0|$.

b) On pose $M = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{a_k}{a_n}\right|$. En utilisant a), montrer que $|z| \leq \max(1, M)$.

c) On propose une autre majoration, en général meilleure que la précédente. On pose $m = \sup_{0\leq k\leq n-1} \left|\frac{a_k}{a_n}\right|$.

En utilisant a), montrer que si $|z| > 1$, alors $|z^n| \leq m\frac{|z^n|-1}{|z|-1}$. En déduire qu'on a toujours $|z| \leq 1 + m$.

11) a) ($\clubsuit$) (*ENS*) Soit $P = X^n - \rho_1 X^{n-1} - \rho_2 X^{n-2} - ... - \rho_n$, avec ρ_i réels positifs.

Montrer que P admet une unique racine réelle positive λ.

b) Soit $Q = X^n + a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + ... + a_n$ un polynôme complexe, avec $|a_k| = \rho_k$.

Montrer que toute racine $z \in \mathbb{C}$ de Q vérifie $|z| \leq \lambda$.

Compacité

12) ($\clubsuit$) a) *Suites et fonctions concaves*

Soit $(u_0, ..., u_n)$ telle que $u_0 = u_n = 0$ et $u_k \geq \frac{1}{2}(u_{k-1} + u_{k+1})$. Montrer que tous les u_k sont positifs.

b) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant $f(a) = f(b) = 0$ et $f'' \leq 0$. Montrer que f est positive.

13) ($\clubsuit$) Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. On suppose que $f(0) = f'(0) = 0$.

a) Montrer qu'il existe k tel que $f(x) \leq kx^2$ au voisinage de 0, c'est-à-dire sur un intervalle $[-\alpha, \alpha]$, avec $\alpha > 0$.

b) Montrer qu'il existe k tel que la parabole $y = kx^2$ est au-dessus du graphe de f sur $[-1,1]$.

13) bis) ($\clubsuit$) (*X-ESPCI*) ($\bigstar$) Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. On suppose $f(0) = f'(0) = 0$.

Montrer qu'il existe un cercle de centre sur (Oy) passant par $(0,0)$ et au-dessus du graphe de f.

14) (♣) (*inspiré écrit X 2016*) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 vérifiant $\forall t \geq 0,\ f''(t) < 0$.

a) Soient a et b dans $[0, +\infty[$ tels que $a < b$. Comparer $f'(a)$ et $f'(b)$.

En déduire qu'il existe $\varepsilon \in]0, b[$ tel que pour tout $h \in]0, \varepsilon[,\ f(a+h) + f(b-h) > f(a) + f(b)$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $\Delta = \{(p_1, ..., p_n) \in [0,1]^n \mid p_1 + p_2 + ... + p_n = 1\}$.

Pour tout $(p_1, ..., p_n) \in \Delta$, on pose $G(p_1, ..., p_n) = f(p_1) + f(p_2) + ... + f(p_n)$.

On admet que G atteint son maximum sur Δ,c'est-à-dire qu'il existe $M \in \Delta$ tel que $G(M) = \sup_\Delta G$.

Montrer que G atteint son maximum en l'unique point $\Omega = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n})$.

Etude de fonctions

15) (♣) Soient p et $q \in]0, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que $\forall (u,v) \in [0, +\infty[^2,\ uv \leq \dfrac{1}{p}u^p + \dfrac{1}{q}v^q$.

16) (♣) (*Centrale*) Résoudre $3^x + 4^x = 5^x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$.

Indication : Considérer la monotonie de $f(x) = a^x + b^x$ lorsque $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$.

17) (♣) (*extrait écrit X 2013*) On se donne quatre nombres réels $a \leq b \leq c \leq d$ tels que $a + d = b + c$.

Etudier les variations de la fonction $f : x \longmapsto |x-a| - |x-b| - |x-c| + |x-d|$ et montrer qu'elle est positive.

Un raisonnement étayé par une représentation graphique sera le bienvenu.