Oraux. Série n°5. Corrigé.

Enveloppe convexe

1) a) On peut écrire $\sum_{i=1}^{p} \mu_i a_i = \overrightarrow{0}$ en coordonnées : on obtient un système de n équations.

Donc le système $\sum_{i=1}^{p} \mu_i a_i = \overrightarrow{0}$ et $\sum_{i=1}^{p} \mu_i = 0$ est un système de $(n+1)$ équations et p inconnues.

Comme $p > n+1$, le système admet une solution non nulle.

b) On a $x = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \theta\mu_i) a_i$ et $\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \theta\mu_i) = 1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

On saouhaite trouver θ tel que $\forall i,\ \lambda_i - \theta\mu_i \geq 0$ et $\exists\, i,\ \lambda_i - \theta\mu_i = 0$.

On note Δ l'ensemble non vide des $i \in [\![1,p]\!]$ tel que $\mu_i \neq 0$, et on prend $j \in \Delta$ tel que $\dfrac{\lambda_j}{\mu_j}$ soit minimum.

On prend $\theta = \dfrac{\lambda_j}{\mu_j}$. On a alors $\lambda_j - \theta\mu_j = 0$ et $\forall i,\ \lambda_i - \theta\mu_i \geq 0$.

On écrit ainsi x comme barycentre d'au plus $(p-1)$ points a_i.

Il en résulte que le nombre minimum p de points de A dont x est un barycentre vérifie $p \leq n+1$ (sinon, vu ce qui précède, on pourrait trouver une combinaison dont le nombre de points est strictement inférieur, ce qui contredirait la minimalité de p).

2) $\dfrac{\int_0^1 t^2 f(t)\ dt}{\int_0^1 t^2\ dt}$ est la valeur moyenne des $f(t)$ pondérés par t^2.

Pour une preuve directe, on montre que $\int_0^1 t^2 f(t)\ dt$ est compris entre $\frac{1}{3}m$ et $\frac{1}{3}M$, où $m = \inf f$ et $M = \sup f$.

3) On dit que la pondération g_n converge vers un Dirac en 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

On peut donc conjecturer $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = f(0)$.

On a $|\lambda_n - f(0)| = \left|\int_{-1}^{+1} f(t)g_n(t)\ dt - \int_{-1}^{+1} f(0)g_n(t)\ dt\right| \leq \int_{-1}^{+1} \delta(t)g_n(t)\ dt$, où $\delta(t) = |f(t) - f(0)|$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en 0, il existe α tek que $\forall t \in [-\alpha, \alpha]$, $\delta(t) \leq \varepsilon$.

D'autre part, pour n assez grand, $\int_{t\notin[-\alpha,a]} g_n \leq \varepsilon$.

Donc on obtient pour n assez grand $\int_{-1}^{+1} \delta(t)g_n(t)\ dt \leq \varepsilon \int_{-1}^{+1} g_n(t)\ dt + \varepsilon \sup(\delta) \leq \varepsilon(1 + \sup(\delta))$.

On peut donc rendre $|\lambda_n - f(0)|$ arbitrairement petit en prenant n assez grand.

(i) g_n est positive, (ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_{-1}^{1} g_n = 1$ et (iii) $\forall \alpha > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} g_n = 1$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n = \int_{-1}^{+1} f(t)g_n(t)\ dt$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n$.

Inégalité de convexite

4) a) Soit $a \in I$. On étudie $\varphi : x \longmapsto f(x) - L(x)$, où $L(x) = f(a) + (x-a)f'(a)$ tangente de f en a.

On a $\varphi'' \geq 0$ et $\varphi'(a) = 0$, donc $\forall x \leq a,\ \varphi'(x) \leq 0$ et $\forall x \geq a,\ \varphi' \geq 0$. Donc $\forall x,\ \varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$.

Donc $\forall x,\ f(x) \geq L(x)$.

b) Il exsiste (α, β) tels que $L(x) = \alpha x + \beta$. On en déduit aisément $L(m) = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} L(x_i)$.

Par a), $\forall i,\ f(x_i) \geq L(x_i)$. En moyennant, on obtient donc $\dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} L(x_i) = L(m)$.

5) a) Comme $\Delta^2 u \geq 0$, alors $\forall n \geq p$, $u_{n+1} - u_n \geq u_{p+1} - u_p = \beta > 0$.

Donc $\forall n \geq p$, $u_n \geq u_p + \beta(n-p)$, et par pincement, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) On considère m tel que $u_m = \max(u_k)_{0\leq k\leq p}$. Supposons par l'absurde $u_m > 0$.

Comme $m \geq 1$ et $\Delta^2 u_m \geq 0$, alors $u_m \leq \frac{1}{2}(u_{m-1} + u_{m+1})$, donc nécessairement, $u_{m-1} = u_{m+1} = u_m$.

Par récurrence descendante, on obtient ainsi $\forall n \in [\![0, m]\!]$, $u_n = u_m$, ce qui cotnredit $u_0 = 0$ et $u_m > 0$.

6) *Inégalité de Hölder.* Soient p et $q > 0$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. C'est le cas avec $(p,q) = (2,2)$.

a) On fixe v. On étudie $\varphi : u \longmapsto uv - \dfrac{1}{p}u^p$. On a $\varphi'(u) = u^{p-1} - v$.

En déduire que $\sup\varphi = \varphi(v^{1/(p-1)}) = \left(1 - \dfrac{1}{p}\right) v^{p/(p-1)} = \dfrac{1}{q}v^q$, car $\dfrac{p}{p-1} = \dfrac{1}{1-1/p} = q$.

b) On a $\sum_{i=1}^n \dfrac{x_i}{A}\dfrac{y_i}{B} \leq \dfrac{1}{p}\sum_{i=1}^n \left(\dfrac{x_i}{A}\right)^p + \dfrac{1}{q}\sum_{i=1}^n \left(\dfrac{y_i}{B}\right)^q = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.