Oraux. Série n°5. Barycentres à coefficients positifs (= valeurs moyennes) et parties convexes

Enveloppe convexe

1) ($\clubsuit$) *Lemme de Kakutani.* Soit A une famille (finie) d'éléments de $\mathbb{R}^n$.

L'enveloppe convexe $C(A)$ de A est l'ensemble des barycentres (à ceofficients positifs) d'éléments de A.

On se propose de montrer que tout élément de $C(A)$ peut s'écrire comme barycentre d'au plus $(n+1)$ points.

Supposons donc $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i$, avec $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ et $p \geq n+2$.

a) Montrer qu'il existe $(\mu_1, ..., \mu_p) \neq (0, ..., 0)$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \mu_i a_i = \overrightarrow{0}$ et $\sum_{i=1}^{p} \mu_i = 0$.

b) Conclure. *Ind* : On pourra considérer $\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \theta\mu_i) a_i$ avec θ bien choisi.

2) ($\clubsuit$) (X) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $\frac{1}{3} f(c) = \int_0^1 t^2 f(t)\, dt$.

3) ($\clubsuit$) Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ continue, et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur $[-1,1]$ telle que

(i) g_n est positive, (ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{-1}^{1} g_n = 1$ et (iii) $\forall \alpha > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} g_n = 1$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = \int_{-1}^{+1} f(t) g_n(t)\, dt$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n$.

Inégalité de convexite

4) ($\clubsuit$) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur l'intervalle I et convexe, c'est-à-dire vérifiant $\forall x \in I$, $f''(x) \geq 0$.

a) Montrer que le graphe de f est au-dessus de ses tangentes.

b) Soient n réels $x_1, ..., x_n$ dans I. On note L la fonction affine tangente de f en $m = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Montrer que $L(m) = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} L(x_i)$. Déduire de a) que $f(m) \leq \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$.

5) ($\clubsuit$) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On pose $\Delta u = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a $\Delta^2 u_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$.

a) On suppose $\Delta^2 u \geq 0$ et qu'il existe p tel que $u_{p+1} > u_p$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) On suppose $\Delta^2 u \geq 0$ et qu'il existe p tel que $u_0 = u_p = 0$. Montrer que $\forall n \in [\![0, p]\!]$, $u_n \leq 0$.

6) *Inégalité de Hölder.* Soient p et $q > 0$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. C'est le cas avec $(p,q) = (2,2)$.

a) Montrer que pour tous $(u,v) \in [0, +\infty[^2$, $uv \leq \dfrac{1}{p} u^p + \dfrac{1}{q} v^q$.

b) Montrer que pour tous réels $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ strictement positifs, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p \right)^{1/q}$$

Indication : On pose $A = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}$ et $B = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/q}$. Appliquer à avec $(u,v) = (\frac{x_i}{A}, \frac{y_i}{B})$.

Remarque : Avec $(p,q) = (2,2)$, on retroube l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Avec le cas limite $(p, q) = (+\infty, 1)$, on retrouve l'inégalité de la moyenne :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sup_{1 \leq i \leq n} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right)$$