Oraux. Série n°4. Indications

Racines et ordres de multiplicité

1) P' divise P ssi P' admet $n-1$ racines communes avec P, donc ssi $r=1$, où r est le nombre de racines de P. Donc $P=\lambda(X-\alpha)^n$. La propriété est vraie aussi sur $\mathbb{R}[X]$: on se place dans $\mathbb{C}[X]$.

2) a) On a $2(i-1)=2^{3/2}e^{3i\pi/4}$. Donc les solutions sont $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$, $\sqrt{2}e^{11i\pi/12}$ et $\sqrt{2}e^{-7i\pi/12}$.

b) Utiliser le reste de la division euclidienne de P par P', ou bien résoudre $P(z)=P'(z)=0$.

3) Noter d'abord que si z est racine de P, alors z^2 est racine. En déduire que $|z|=0$ ou 1.

En effet, sinon, il y a aurait une infinité de racines (les $z^{(2^n)}$ éranty alors distincts).

Noter ensuite que si z est racine, $(z+1)^2$ aussi. En déduire que $|z|=|z+1|=1$ (cf intersection de cercles), et obtenir ainsi que $z\in\{e^{i2\pi/3},e^{-2i\pi/3}\}$. Comme P est réel, les deux racines conjugiées ont même ordre de multiplicité. Et P est unitaire (car $\lambda^2=\lambda$ implique $\lambda=1$). Donc $P=(X^2+X+1)^m$, avec $m\in\mathbb{N}$. Réciproque par calcul direct.

Degré

4) a) Par le binôme, on a $\delta(X^n)=nX^{n-1}$. Par linéarité, si $\deg P=n\geq 1$, alors $\deg\delta(P)=n-1$ et le coefficient dominant vaut $n\lambda$, où λ est le coefficient dominant de P.

On a $\operatorname{Ker}\delta=\mathbb{R}_0[X]$, et par le th du rang appliqué à $\delta_n:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $\operatorname{Im}\delta_n=\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc $\operatorname{Im}\delta=\mathbb{R}[X]$. Variante : $\operatorname{Im}\delta=\operatorname{Vect}(\delta(X^n))_{n\in\mathbb{N}}=\operatorname{Vect}(nX^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}=\mathbb{R}[X]$.

b) L'équation $\delta(P)=Q$ admet une solution P_0, et les solutions sont les $P_0+\lambda$, avec constante $\lambda\in\operatorname{Ker}\delta$.

c) Résulte de b) : construction par récurrence.

d) Appliquer l'hypothèse de récurrence à $\delta(P)$.

On obtient $\delta(P)=\sum_{n=0}^{+\infty}\delta^{n+1}(P)(0)\ H_n(X)=\delta(R)$, où $R=\sum_{n=0}^{+\infty}\delta^{n+1}(P)(0)\ H_{n+1}(X)$.

Or, $\delta(P)=\delta(R)$ ssi $P-R\in\operatorname{Ker}\delta$. Donc $P(X)=R(X)+k$, où $k=P(0)-R(0)=P(0)$.

On obtient donc bien $P(X)=\sum_{n=0}^{+\infty}\delta^n(P)(0)\ H_n(X)$.

Remarque : Cette formule est l'analogue (pour la dérivation discrète) de la formule de Taylor :

$P(X)=\sum_{n=0}^{+\infty}P^{(n)}(0)\ T_n(X)$, où $T_n(X)=\frac{1}{n!}X^n$ vérifie $T'_{n+1}=T_n$ et $T_{n+1}(0)=0$.

Remarque : On peut d'autre part expliciter les H_n, appelés polynômes de Hermite :

$H_n(X)=\frac{1}{n!}X(X-1)...(X-n+1)$. Par exemple, si $\deg P\leq 2$, $P(X)=P(0)+P(1)X+\frac{1}{2}P(2)X(X-1)$.

5) Utiliser : si z racine de P, les racines carrées le sont aussi, donc toutes ses racines 2^p-ième.

Si P admettait une racine non nulle, toutes les racines 2^p-ième de z formeraient un ensemble infini ...

Donc $P(x)=\lambda X^n$, et réciproquement, λX^n convient ssi $\lambda=1$.

Autre solution : Ecrire $P(X)=\lambda X^n+R$ et développer $P(X)^2=\lambda^2X^{2n}+n\lambda X^nR+...$ pour prouver $R=0$ et $\lambda=1$.

6) Il suffit de considérer le coefficient en X^p de $(X+1)^n(X+1)^m=(X+1)^{n+m}$

Division et division euclidienne

7) a) Justifier que P divise Q ssi j est racine de Q, donc ssi $j^{3n}=1$ et $j^n\neq 1$, donc ssi $n\notin 3\mathbb{N}$.

b) Justifier que $A(X) = P(X^4)$ divise $B(X) = Q(X^4)$ ssi P divise Q.

Racines des polynômes réels

8) a) Etudier la fonction réelle $x \longmapsto P(x)$. Distinguer les cas $p > 0$ et $p \leq 0$.

b) Se ramener au cas $a = 1$ et $b = 0$ en considérant $Q(X) = aP(X - \alpha)$, avec $\alpha = \frac{b}{3a}$.

9) a) Par récurrence d'ordre 2, $\deg P_n = n$.

b) On considère $x_1 < ... < x_n$ les racines de P_n. On a $P_{n+1}(x_k) = -P_{n-1}(x_k)$. Et P_{n+1} et P_{n-1} ont même signe en $+\infty$ et ont même signe en $-\infty$. En déduire que P_{n+1} change $(n+1)$ fois de signe.

10) Utiliser $\forall x \notin \{x_1, x_2, ..., x_r\}$, $\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_i}{x - x_i}$.

11) Considérer les racines $0 < x_1 < ... < x_r < 1$ d'ordre impair sur $]0,1[$.

Considérer $Q(X) = (X - x_1)(X - x_2)...(X - x_r)$ et noter que PQ est de signe constant sur $]0,1[$.

12) a) Utiliser $P^{(n-2)}$ qui serait scindé si P scindé.

b) Considérer $Q(x) = x^n P(\frac{1}{x})$, où $n = \deg P$. On se ramène ainsi à la situation du a).

c) Sinon, le polynôme $P^{(k)}$ serait scindé, ce qui contredit a).

Théorème de d'Alembert-Gauss et factorisation ; relations entre coefficients et racines

13) Noter que $(X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - abc$.

On a nécessairement $|a| = |b| = |c| = 1$. Or, $|z| = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \overline{z}$.

Comme $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = 1$, alors on obtient $ab + ac + bc = 1$, donc a, b, c racines de $X^3 - X^2 + X - 1$.

En conclure que $\{a, b, c\} = \{1, i, -i\}$.

14) Les racines $(2n)$-ième de 1 sont 1, -1, les $e^{ik\pi/n}$, avec $1 \leq k \leq n-1$ et leurs conjugués.

Donc $X^{2n} - 1 = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}(X^2 + 2\cos(\frac{k\pi}{n})X + 1)$.

De même, montrer que $X^{2n} + 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X^2 + 2\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})X + 1)$. Pas de racine réelle dans ce cas.

15) Le polynôme est de degré $(n-1)$ et de coefficient dominant $2n$. On cherche les racines.

On se ramène à résoudre $\dfrac{z+1}{z-1} = e^{i\theta} \in U_n$, c'est-à-dire $z = \dfrac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} = \dfrac{2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}}{2i\sin(\theta/2)e^{i\theta/2}} = -i \operatorname{cotan}(\theta/2)$.

On prend $\theta = \frac{2k\pi}{n}$, avec $1 \leq k < n$ (ar pour $e^{i\theta} = 1$, il n'y a pas de solution).

On obtient $(n-1)$ racines distinctes. Donc $P = 2n\prod_{k=1}^{n-1}(x + i \operatorname{cotan}(\frac{k\pi}{n}))$.

16) a) Utiliser $|(A+iB)(C+iD)|^2 = (AD - BC)^2 + (AC + BD)^2$.

b) En décomposant P en facteurs irréductibles, se ramener au cas où $\deg P = 2$.

Polynômes de Lagrange et interpolations

17) Chaque polynôme de degré $< n$ est son propre polynôme d'interpolation.

Donc $P_k(X) = \sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i)L_i(X)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k L_i(X) = X^k$ pour tout $k < n$.

D'autre part, $Q(X) = X^n - (X - \lambda_1)...(X - \lambda_n)$ est le polynôme d'interpolation de X^n en les λ_i.

18) On pose $Q(x) = (x^n - 1)S(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} L_k(x)$, où $L_k(x) = \prod_{j \neq k}(x - \omega^j)$.

Le polynôme Q vérifie donc $Q(\omega^k) = \omega^{kp} L_k(\omega^k)$.

Or, de façon générale, lorsque $B(X) = \prod_{k=1}^{n}(x - \alpha_k)$, on a $B'(\alpha_k) = n \prod_{j \neq k}(\alpha_k - \alpha_j)$.

Or, les ω^k sont les racines de $B = X^n - 1$, donc $L_k(\omega^k) = B'(\omega^k) = n\omega^{k(n-1)} = n\omega^{-k}$.

On en déduit que $Q(\omega^k) = n\omega^{(p-1)k} = R(\omega^k)$, où $R = nX^{(p-1) \bmod n}$.

Q et R sont de degré $< n$ et ont n valeurs communes. Donc $Q = R$. Ainsi, $S(x) = \dfrac{nx^{(p-1) \bmod n}}{x^n - 1}$.

Remarque : De façon générale, si Q est scindé à racines simples de racines a_k, $\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} \frac{1}{x-a_k}$.

19) a) Il suffit de vérifier que $\deg L_\omega < n$ et que $L_\omega(z) = 1$ si $z = \omega$ et 0 si $z \in U_n \setminus \{\omega\}$.

b) On a $P = \sum_{\omega \in U_n} P(\omega) L_\omega(X)$. On a $|a_j| = \left|\frac{1}{n} \sum_{\omega \in U_n} P(\omega)\omega^{n-k}\right| \leq \frac{1}{n} \sum_{\omega \in U_n} P(\omega) = a_0 = 1$.

20) Considérer $u : \mathbb{R}_{2n-1}[X] \to \mathbb{R}^{2n} \quad P \longmapsto (P(a_1), ..., P(a_n), P'(a_1), ..., P'(a_n))$.

Montrer que u est injective et en déduire (linéarité + dimension) que u est bijective.

Polynômes de Tchebychev et variantes

21) b) ($\Rightarrow$) L'idée est de faire apparaître des termes de la forme $t^n + t^{-n}$.

Or, on a $f(t) = f(1/t)$, donc $f(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(1/t)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i(t^{|m_i|} + t^{-|m_i|})$. Conclure avec a).

22) cf exo 18) série n°2 (sommes)

Algèbre des polynômes et transformations algébriques

23) a) Utiliser $Q(X) = X^n P(\frac{1}{X}) = \prod_{k=1}^{n}(1 - Xz_k)$, donc les racines de Q sont les $\frac{1}{z_k}$.

b) Les $z_k = e^{2ik\pi/n} - 1$ sont les racines de $P(X) = \frac{(X+1)^n - 1}{X} = n + \binom{n}{2}X + ... + X^{n-1}$. En déduire $S = -\binom{n}{2}/n = -\frac{n-1}{2}$.