Oraux. Série n°4. Polynômes

Racines et ordres de multiplicité

1) (♣) (*Centrale*) Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

Remarque : On rappelle que si a est racine de P d'ordre $m \geq 1$, alors a est racine de P' d'ordre $(m-1)$.

Le nombre de racines communes à P et P' est $n - r$, où $n = \deg P$ et r le nombre de racines distinctes de P.

2) (♣) a) Résoudre l'équation complexe $z^3 = 2(i-1)$.

b) (X) Soit $P = X^4 + 8(1-i)X + a$. Existe-t-il $a \in \mathbb{R}$ tel que P admette une racine double (dans $\mathbb{C}$) ?

3) (♣) (*Centrale*) Déterminer les polynômes réels non nuls P vérifiant $P(X)P(X-1) = P(X^2)$.

Degré et coefficients

Degré et coefficients

4) (♣) (*Centrale*) *Dérivation discrète.* On pose $\delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par $\delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

a) Déterminer le degré et le coefficient dominant de $\delta(P)$. Préciser le noyau et l'image de δ.

b) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = Q$ et $P(0) = 0$.

c) Montrer qu'il existe une unique suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $H_0 = 1$ et $\delta(H_{n+1}) = H_n$ et $H_{n+1}(0) = 0$.

d) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta^n(P)(0)\ H_n(X)$.

Remarque : La somme est finie car $\delta^n(P)$ est nul pour tout entier $n > \deg P$.

5) (♣) (*Centrale*) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul. Montrer que $P(X)^2 = P(X^2)$ ssi $P(X) = X^d$ (monôme).

6) (♣) (*extrait Centrale*) Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $p \leq m+n$. Montrer que $\sum_{k=\max(0,p-m)}^{\min(n,p)} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p}$.

Remarque : Cela revient en fait à $\sum_{k+j=p,\ 0\leq k\leq n,\ 0\leq j\leq m} \binom{n}{k}\binom{m}{j} = \binom{m+n}{p}$.

Remarque : Avec $n = m = p$, on obtient en particulier $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Division et division euclidienne

6) (♣) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $P = X^2 + X + 1$ divise $Q = X^{2n} + X^n + 1$ ssi 3 ne divise pas n.

b) (*Centrale*) Donner une CNS sur p et q réels pour que $A = X^8 + X^4 + 1$ divise $B = X^{8n} + pX^{4n} + q$.

Racines des polynômes réels

Rappel : Si P réel scindé (resp. scindé à racines simples), il en est de même de sa dérivée P', donc des $P^{(k)}$.

8) (♣) (*Centrale*)

a) Donner une CNS sur les réels p et q pour que $P = X^3 + pX + q$ possède 3 racines réelles distinctes.

b) En déduire une CNS sur les réels a, b, c, d pour que $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ possède 3 racines réelles distinctes.

Indication : a) Etudier la fonction réelle $x \longmapsto P(x)$. Distinguer les cas $p > 0$ et $p \leq 0$.

b) Se ramener au cas $a = 1$ et $b = 0$ en considérant $Q(X) = aP(X - \alpha)$, avec $\alpha = \frac{b}{3a}$.

9) (♣) *Suites de Sturm.* On considère $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $P_0 = 1$ et $P_1(X) = X$ et $P_{n+1} = (X - a_n)P_n - P_{n-1}$.

a) Calculer $\deg P_n$.

b) Montrer que P_n est scindé à racines simples (sur $\mathbb{R}$).

10) (♣) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x)P''(x) \leq P'(x)^2$.

11) (♣) (*extrait X écrit*) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $\forall k \in \{0, 1, ..., n\}$, $\int_0^1 t^k\ P(t)\ dt = 0$.

a) Que dire de $\int_0^1 P(t)\ Q(t)\ dt$ pour Q polynôme de degré $\leq n$?

b) Montrer que P admet au moins n racines réelles distinctes sur $]0, 1[$.

Indication : Considérer PQ, où Q admet comme seules racines les racines x_i de P d'ordre impair sur $]0, 1[$.

12) a) (★) Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ tel que $a_{n-1} = 0$ et $a_n a_{n-2} > 0$. Montrer que P n'est pas scindé.

b) (X) (★) Soit $P(X) = a_0 + a_2X^2 + ...$ un polynôme réel, avec $a_0a_2 > 0$. Montrer que P n'est pas scindé.

c) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, et $k \in \{2, 3, ..., n\}$ tels que $a_k a_{k+2} > 0$ et $a_{k+1} = 0$.

Montrer que P admet au moins une racine complexe non réelle.

Théorème de d'Alembert-Gauss et factorisation ; relations entre coefficients et racines

13) (♣) Déterminer les $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que $a + b + c = 1$, $abc = 1$ et $|a| = |b| = |c|$.

14) (♣) (*Centrale*) Factoriser $X^{2n} - 1$ et $X^{2n} + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

15) (♣) Factoriser $(X + 1)^n - (X - 1)^n$ dans $\mathbb{C}[X]$.

16) (♣) (X) a) Montrer que dans $\mathbb{R}[X]$, $(A^2 + B^2)(C^2 + D^2)$ est la somme de deux carrés.

b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$. Montrer qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P = A^2 + B^2$.

Indication : a) Utiliser $|(A + iB)(C + iD)|^2 = (AD - BC)^2 + (AC + BD)^2$.

Polynômes de Lagrange et interpolations

17) (♣) Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des réels distincts. On note L_i les polynômes de Lagrange associés à $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Que valent les $P_k(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k L_i(X)$ pour $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$? Montrer que $P_n(X) = X^n - (X - \lambda_1)...(X - \lambda_n)$.

18) (♣) (X) On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer $S(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\omega^{kp}}{X - \omega^k}$.

19) (♣) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $U_n = \{e^{2ik\pi/n},\ 0 \leq k < n\}$. Montrer que les polynômes de Lagrange associées aux racines n-ième de l'unité sont les $L_\omega(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{n-k} X^k$, avec $\omega \in U_n$.

b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n - 1$, de coefficients a_k avec $a_0 = 1$ et tel que $\forall q \in [\![0, n-1]\!]$, $P(e^{2iq\pi/n}) \in \mathbb{R}^+$.

Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, $|a_k| < 1$.

20) (♣) *Interpolation de Hermite*

Soient $a_1, ..., a_n$ distincts et soient $(\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tels que $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$, $P(a_k) = \alpha_k$ et $P'(a_k) = \beta_k$.

Polynômes de Tchebychev et variantes

21) (♣) (X) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $P_n\left(t + \dfrac{1}{t}\right) = t^n + \dfrac{1}{t^n}$.

b) Soient $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(m_1, ..., m_n) \in \mathbb{Z}^n$. On pose $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $f(t) = \sum_{i=1}^n a_i t^{m_i}$.

Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $f(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ ssi il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $f(t) = P\left(t + \dfrac{1}{t}\right)$.

22) (♣) Soit $n = 2m + 1$ un entier impair.

a) (*X, Mines*) Montrer qu'il existe un unique polynôme P_n de degré n tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(nx) = P_n(\sin(x))$.

b) (*ENS*) Montrer que $\sin(nx) = n(\sin x) \prod_{k=1}^m \left(1 - \dfrac{(\sin x)^2}{\sin(k\pi/n)^2}\right)$.

Algèbre des polynômes et transformations algébriques

23) (♣) a) Soit $P = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$ un polynôme de degré n, de racines $z_1, ..., z_n$ non nulles.

On pose $Q(X) = a_n + a_{n-1} X + ... + a_0 X^n$. Montrer que $Q(X) = \prod_{k=1}^n (1 - z_k X)$.

b) (X) Calculer $S = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{e^{2ik\pi/n} - 1}$.