Oraux. Série n°3. Indications

Racines de l'unité

1) a) On a clairement $U_3 U_4 \subset U_{12}$. Noter ensuite que $\frac{k}{3} - \frac{k}{4} = \frac{k}{12}$.

b) Il suffit que φ soit injective. Or, $\frac{\pi}{6}kp = \frac{\pi}{6}k'q\ [2\pi] \Leftrightarrow 12$ divise $p(k-k')$. En déduire la CNS ; $\operatorname{pgcd}(12,p) = 1$.

Géométrie

2) a) $x^2 - x + 1$ car $e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3} = 1$ et $e^{i\pi/3}e^{-i\pi/3} = 1$.

b) Les points (distincts) d'affixes a, b, c forment un triangle équilatéral ssi $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3}$ ou $\frac{c-a}{b-a} = e^{-i\pi/3}$.

Donc par a), ssi $\left(\frac{c-a}{b-a}\right)^2 - \left(\frac{c-a}{b-a}\right) + 1 = 0$, ce qui donne bien en développant $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c$.

Remarque : Il est rassurant de trouver une relation symétrique en a, b, c.

3) a) $|1 - \overline{a}z|^2 - |z-a|^2 = 1 + |a|^2|z|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{a}z) - |z|^2 - |a|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{a}z) = |a|^2|z|^2 + 1 - |z|^2 - |a|^2$.

Donc $|a|^2|z|^2 + 1 - |z|^2 - |a| = (1-|z|)(1-|a|)$.

b) On vérifie avec a) que $\varphi(U) \subset U$ et $\varphi(D) \subset D$. Par ailleurs $\varphi(z) = y$ ssi $(z-a) = y(1-\overline{a}z)$ donc ssi $z = \frac{y-b}{1-\overline{b}y}$,

où $b = -a$. Donc $y \in U$ lorsque $z \in U$, et de même avec D.

Sommes de nombres complexes

4) Posons $\omega = e^{2i\pi/n}$. On a $S = \sum_{k=0}^{p-1}(\omega^k)^n = \sum_{k=0}^{p-1}(\omega^n)^p = \frac{\omega^{np}-1}{\omega^n-1}$ si $n \notin p\mathbb{Z}$, et $S = p$ si p divise n.

Remarque culturelle : En fait z^n décrit U_q lorsque z décrit U_p, où $q = \frac{p}{\operatorname{pgcd}(p,n)}$.

5) a) Supposons $\theta \neq 0\ [2\pi]$. En posant $\omega = e^{i\theta}$, on a : $s_n = \dfrac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = \omega^n \dfrac{1}{\omega - 1} - \dfrac{1}{\omega - 1}$.

Donc $|s_n| \leq \dfrac{2}{|\omega - 1|} = \dfrac{1}{|\sin(\theta/2)|}$. Donc $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ssi $\theta \neq 0\ [2\pi]$.

b) Et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique ssi ω racine de l'unité $\neq 1$.

On se trouve en fait dans un cas particulier de l'exercice précédent, puisque $s_{n+1} = e^{i\theta}s_n + 1$.

Inégalité triangulaire

6) a) $\left|\sum_{k=1}^n z_k\right|^2 = \left(\sum_{k=1}^n z_k\right)\left(\sum_{k=1}^n \overline{z_k}\right) = \sum_{k=1}^n |z_k|^2 + 2\sum_{j<k}\operatorname{Re}(z_j z_k)$.

On a $\operatorname{Re}(z_j z_k) = \rho_j\rho_k\cos(\theta_k - \theta_j) \leq \rho_j\rho_k$ avec égalité ssi $\rho_j\rho_k = 0$ ou $\cos(\theta_k - \theta_j) = 1$.

b) Il y a égalité $\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$ ssi $\forall j < k$, $\operatorname{Re}(z_j z_k) = \rho_j\rho_k$.

Donc il y a égalité ssi les z_k non nuls ont même argument (c'est-à-dire ssi les points d'affixes z_k appartiennent tous à une même demi-droite issue de O).

On a $|P_{n+1}-1| = |P_n(1+z_n)-1| = |(P_n-1)(1+z_n)+z_n| \leq (Q_n-1)(1+|z_n|)+|z_n| = Q_{n+1}-1$.

Noter l'utilité de donner des noms aux objets et de les faire apparaître explictement.

Remarque : On peut développer aussi directement et appliquer l'inégalité triangulaire :

$\prod_{k=1}^{n}(1+z_k) - 1 = \sum_{I \text{ partie de non vide de } \{1,2,\ldots n\}} \prod_{k\in I} z_k$.

b) Utiliser $\forall x \in \mathbb{R}$, $x+1 \leq \exp(x)$.

Racines carrées

8) a) On a $P(X) = (X-(1+i))^2 + 4i - (1+i)^2 = (X-(1+i))^2 + 2i$.

Or, les racines carrées de $-2i$ sont $(1-i)$ et $-(1-i)$.

Donc les racines de P sont $(1+i)+(1-i) = 2$ et $(1+i)-(1-i) = 2i$.

b) On note u et $-u$ les racines carrées de $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$.

Les racines de P sont $\frac{1}{2}(-\alpha+u)$ et $\frac{1}{2}(-\alpha-u)$. Elles ont même module ssi $\alpha\overline{u} + \overline{\alpha}u = 0$.

(ce qui d'ailleurs équivaut à α et u orthogonaux).

Or, $\alpha\overline{u} + u\overline{\alpha} = 0$ équivaut à $\overline{\alpha}u \in i\mathbb{R}$ c'est-à-dire $(\overline{\alpha}u)^2 \in \mathbb{R}^-$, et on conclut vu que $u^2 = \alpha^2 - 4\beta$.